UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

PROPIEDAD DE MARTINGALA, VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA Y BURBUJAS FINANCIERAS

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN
CIENCIAS DE LA INGENIERÍA, MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS
MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

ANDRÉS IGNACIO RIVEROS VALDEVENITO

PROFESOR GUÍA:
JAIME SAN MARTÍN ARISTEGUI

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JOAQUÍN FONTBONA TORRES
DANIEL REMENIK ZISIS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por CONICYT-PFCHA/MAGISTER NACIONAL/2019 - 22190511 y CMM Conicyt PIA AFB170001

SANTIAGO DE CHILE
2020

RESUMEN DE LA MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO Y TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA MENCIÓN MATEMÁTICAS APLICADAS
POR: ANDRÉS IGNACIO RIVEROS VALDEVENITO
FECHA: JUNIO 2020
PROF. GUÍA: JAIME SAN MARTÍN ARISTEGUI

PROPIEDAD DE MARTINGALA, VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA Y BURBUJAS FINANCIERAS

El presente trabajo tiene como objetivo principal analizar cómo se comporta la propiedad de martingala de una componente de la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas acopladas y correlacionadas. Este sistema viene dado por el interés de los matemáticos financieros en identificar cuándo un proceso estocástico particular que modela un proceso de precio presenta un fenómeno conocido como una burbuja financiera.

Cuando el valor de mercado de un activo es mayor que el valor real de dicho activo, es decir, cuando existe una percepción de que un activo tiene más valor que el que debiese tener, se dice que dicho activo presenta una burbuja financiera. Existen varios ejemplos en la historia, siendo el más común y presente hoy la crisis subprime de 2008. La presencia de una burbuja financiera en un activo se puede identificar estudiando la propiedad de martingala del proceso de precio de dicho activo. Si este proceso es una martingala real, no existe burbuja, mientras que si es lo que se llama una martingala local estricta, entonces sí existe una burbuja.

En la introducción de este trabajo, se presenta formalmente la definición de burbuja financiera, junto con todos los fundamentos matemáticos necesarios para sustentar dicha definición. Además, se introduce el modelo particular que se analiza en el resto del trabajo, un modelo de volatilidad estocástica, donde la volatilidad del proceso de precio se rige por su propia ecuación diferencial estocástica. Dicha ecuación tiene una componente de drift de potencia ponderada, mientras que su volatilidad es de una potencia. El proceso de precio se define luego como la martingala exponencial de una potencia positiva de la volatilidad, con respecto a un movimiento browniano correlacionado con el subyacente a la volatilidad.

El capítulo 1 presenta los resultados más avanzados de la teoría del cálculo estocástico que son necesarios para llevar a cabo el análisis del sistema: el teorema de Girsanov y el test de explosión de Feller. En el capítulo 2 se discute la validez de la ecuación de volatilidad como modelo, restringiendo el valor de sus parámetros a los casos de interés, los no-explosivos. Los resultados principales sobre la propiedad de martingala del proceso de precio están en el capítulo 3, sujetos siempre al marco del modelo encontrado en el capítulo anterior.

Finalmente, la conclusión resume los resultados principales del trabajo, y presenta un análisis breve de tanto la completitud de la caracterización encontrada como de sus limitaciones. Más aun, presenta una generalización al caso de drift polinomial en la volatilidad, junto con las consecuencias que esto conlleva para el caso de una potencia negativa en el proceso de precio. También se plantean nuevos posibles problemas dentro del mismo modelo, y que pueden inspirar trabajos en el futuro.

"This is how you do it: you sit down at the keyboard and you put one word after another until it's done. It's that easy, and that hard."- Neil Gaiman.

Agradecimientos

Es muy difícil comenzar a escribir algo remotamente similar a agradecimientos para un trabajo como este, cuando sé que representa el final de una etapa tremendamente significativa, pero al mismo tiempo muestra solo una parte de lo que fue dicha etapa, y deja fuera a toda la gente cuyo apoyo fue crucial para poder no solo completar este trabajo, pero también para convertirme en la persona que soy ahora. El espacio es reducido y no puedo incluirlos a todos, pero sepan que si tuvimos alguna conversación profunda, un saludo de buenos días o nos reímos del mismo chiste, agradezco su apoyo.

Este trabajo no es solo mío. Mi padre y mi madre, Nicolás y Marcela, pusieron tanto o más que yo con su apoyo incondicional absoluto. Me enseñaron que la perseverancia sostiene a la inteligencia y que, frente a la adversidad, un respiro profundo cambia tu perspectiva y visión de mundo. A mi hermano Aníbal, mi compañero de experiencias, le debo tantas lecciones de vida que no terminaría nunca de escribir. No hay nadie más fuerte y nadie mejor en hacerme reír. Esto es de todos.

A mis amigos de todos los caminos de la vida. A mi wolf pack, que me ha acompañado y levantado desde el principio; el mundo sería un lugar gris sin todos ustedes. A Nicolás, Romina y Carlos, que nunca se olvidaron de recordarme que hay cosas aparte de las matemáticas. A mis compañeros de batalla, miembros de la oficina 436. Fue un honor compartir la sala y la pizarra con cada uno de ustedes y espero seguir haciéndolo en el futuro. A Juan, que me tuvo más fé que yo mismo; nos encontraremos en lo que viene para ambos. A todos, gracias.

Al profesor Jaime, que me enseñó primero a temer y después a disfrutar la teoría de la medida, tanto así que guió este trabajo. A los profesores Joaquín y Daniel, que me formaron integralmente como probabilista y como profesor. A cada uno de los profesores del departamento que aportaron a mi formación. A Natacha, por su ayuda constante. A cada uno de los funcionarios del departamento; nadie podría imaginar el caos que existiría sin su apoyo. Gracias totales.

Queda aun mucha gente por mencionar, pero como dije antes, el espacio se hace poco. Quiero recordar por último a mis abuelos, y agradecer también a mis abuelas. Yo te recuerdo, Tito, y sé que hubieses estado orgulloso.

Solo queda despedirse citando a Vax: "How lucky I have been to have had all of you. How lucky indeed. Thank you.". Gracias a todos.

Tabla de Contenido

Índice de Tablas

Introducción

Para comprender el origen del problema central de este trabajo y su motivación, es necesario primero dar una idea general del fundamento económico de donde surge. En economía, el concepto de burbuja financiera está íntimamente relacionado con las debacles de los mercados modernos, siendo identificado como la causa principal de la especulación desenfrenada. Entre los ejemplos reales se encuentran el sobreprecio de terrenos pantanosos en Florida, vendidos como propiedades exclusivas con borde de lago; que llevó de forma indirecta a la crisis de 1929, o la más reciente crisis subprime de 2008, causada por la sobrevaloración de hipotecas de alto riesgo en el mercado inmobiliario de Estados Unidos (más ejemplos son presentados en [14], [2]). Al gatillar eventos de tal magnitud, es evidente que se ha generado un interés importante en poder describir (ver, por ejemplo,[7], [8]), y si es posible identificar este fenómeno de forma cuantitativa (ver [4]) usando las herramientas de matemáticas financieras y, por consiguiente, del cálculo estocástico.

En términos simples, cuando el precio observado o real de un activo es más alto que el precio justo de mercado de este, entonces se dice que este activo presenta una burbuja financiera. Sin embargo, esta definición inicial deja mucho que desear. ¿A qué se hace alusión cuando se habla del precio justo de mercado de un activo? Es más, en la teoría clásica de mercados, el precio de mercado de un activo refleja exactamente su valor real ya que, si no fuese así, los individuos tenderían a vender (si el precio es muy alto) o a comprar (si el precio es muy bajo) hasta equiparar estos valores. En otras palabras, la existencia de burbujas pareciera ir en contra de los supuestos clásicos del mercado. Entonces, para poder estudiar este fenómeno, que se sabe ocurre empíricamente, se debe hacer una diferencia clara entre el valor de un activo y su precio de mercado, definiendo todos estos conceptos desde una perspectiva matemática y, más precisamente, probabilística. En lo que sigue, se usan las definiciones y construcciones presentes en el capítulo 3 de [6].

Se comienza con un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, donde la filtración cumple las condiciones habituales, y se considera $(W_t)_{t\geq 0}$ un movimiento browniano en dicho espacio. En este contexto, se define un proceso de precio de un activo a través de la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$\mathrm{d}S_t = b_t \mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{d}W_t \quad S_0 = s_0 > 0,$$

donde la función b_t se conoce como el drift del proceso, mientras que σ_t es su volatilidad, y se toman suficientemente regulares para que la ecuación anterior tenga sentido dentro del espacio de probabilidad (ver por ejemplo [10], teoremas 5.2.9 ó 5.3.6).

En este modelo de mercado simple, con solo un activo riesgoso, se impone clásicamente además una condición general conocida como *No Free Lunch with Vanishing Risk* (NFLVR), que excluye de este mercado estrategias de inversión con retorno positivo seguro y estrategias que se obtienen como límite de las anteriores (ver [6], definición 2.5). En palabras simples, esta condición asegura que no existen formas en las que un individuo pueda ganar dinero con probabilidad positiva sin que arriesgue perder dinero con alguna probabilidad positiva. La razón comunmente citada para asumir este supuesto es que, de existir alguna estrategia de este tipo, algún individuo ya la hubiese aprovechado y por ende no exisitiría en un mercado suficientemente complejo.

La importancia de esta condición, dejando de lado la interpretación económica, es que matemáticamente se tiene el siguiente teorema

Teorema 0.1 *Un modelo de precios cumple NFLVR si y solo si existe una medida $\tilde{\mathbb{P}}$, equivalente a $\mathbb{P}$, tal que, bajo $\tilde{\mathbb{P}}$, S_t es una martingala local. Esta medida se denomina una medida equivalente de martingala local (MEML).*

Esto último implica que, suponiendo nuevamente suficiente regularidad sobre el coeficiente de volatilidad σ_t (ver [10], teorema 3.4.2), existe un proceso $\tilde{W}_t$, que es movimiento browniano bajo $\tilde{\mathbb{P}}$, y una nueva función de volatilidad $\tilde{\sigma}_t$, tal que S_t cumple

$$\mathrm{d}S_t = \tilde{\sigma}_t \mathrm{d}\tilde{W}_t \quad S_0 = s_0 > 0,$$

de donde se obtiene la estructura básica de los procesos de precio que se estudian en este trabajo. Ahora bien, hay que notar que el teorema 0.1 no fija una ecuación final para el proceso S_t, pues no se refiere a la unicidad de la MEML. Para atacar este problema, se debe introducir la noción de un *mercado completo*. Un mercado se dice completo si y solo si cualquier derivado accesible de S_t, integrable con respecto a $\tilde{\mathbb{P}}$, admite una descripción tal que es una $\tilde{\mathbb{P}}$-martingala (para más detalles, ver [6], capítulo 2). Es importante notar que la noción de mercado completo depende de la medida $\tilde{\mathbb{P}}$.

La completitud de un mercado se vuelve de vital importancia debido al siguiente teorema

Teorema 0.2 *Si un mercado es completo entonces la MEML es única. Si además se tiene que existe una única MEML, entonces el mercado es completo.*

No obstante, aunque este teorema sea considerado fundamental en el área financiera, esta condición no es central para este trabajo pues, siguiendo el razonamiento de [5], se asume una de dos condiciones: o el mercado es completo; o el mercado incompleto que se estudia está incluído dentro de un mercado más complejo que es completo. En cualquiera de estos casos, se tiene que el mercado con el que se trabaja tiene una única MEML, ya sea por ser completo de por sí, o por heredar dicha medida del mercado completo que lo incluye.

Teniendo ya la MEML, $\tilde{\mathbb{P}}$, se puede proceder a dar sentido a la idea de burbuja financiera presentada anteriormente. Se tiene que, bajo $\tilde{\mathbb{P}}$, S_t es una martingala local y, como representa a un proceso de precio, debe ser positiva. Esto implica entonces que S_t es en particular una supermartingala (ver [10], problema 1.5.19). Más aun, como es una supermartingala positiva, esto implica que existe una variable S_∞ tal que

$$S_t \xrightarrow{t\to\infty} S_\infty \quad \tilde{\mathbb{P}} - c.s.$$

y además el proceso $\{S_t : 0 \leq t \leq \infty\}$ también es una supermartingala (ver [10], problema 1.3.16).

Ahora, si se considera un tiempo inicial de observación t_0, y algún tiempo de parada τ representando una estrategia de inversión, satisfaciendo obviamente $\tau \geq t_0$, entonces se tiene que (ver [6], teorema 3.1)

$$S_{t_0} = \sup_{\tau \in [t_0, \infty]} \mathbb{E}\left(S_\tau | \mathcal{F}_{t_0}\right),$$

donde la esperanza se toma con respecto a la medida $\tilde{\mathbb{P}}$.

Esta igualdad se traduce en que el valor S_t es en realidad el valor más alto asequible en el futuro con cualquier estrategia posible que se intente. Esto viene a corroborar el supuesto de no arbitraje, pues si el supremo fuese mayor a S_t, existe la oportunidad de aproximar, a través de una sucesión admisible de estrategias, $(\tau^n)_n$, una que c.s. tiene retornos positivos. Todo esto lleva a concluir que el proceso S_t describe el valor observado de mercado del activo, o en otras palabras, representa la mayor ganancia posible observada por el público en el instante t.

Por otro lado, un supuesto importante del análisis financiero es que realizar una transacción no conlleva beneficios para ninguna de las partes, es decir, si un individuo intercambia valores del activo por dinero o viceversa, el valor del conjunto sigue siendo el mismo. Esto quiere decir que aplicar o no aplicar una estrategia le es indiferente; lo que implica entonces que el valor fundamental del activo en el tiempo t, solamente conociendo la información hasta tiempo t, debiese tener el mismo valor que quedarse con el activo para siempre, o equivalentemente, ser igual a

$$\mathbb{E}\left(S_\infty | \mathcal{F}_t\right),$$

donde la esperanza nuevamente se toma con respecto a la medida $\tilde{\mathbb{P}}$.

Ahora bien, gracias a la igualdad del supremo, se tiene que

$$S_t \geq \mathbb{E}\left(S_\infty | \mathcal{F}_t\right),$$

o en otras palabras

$$\beta_t := S_t - \mathbb{E}\left(S_\infty | \mathcal{F}_t\right) \geq 0,$$

donde se define β_t como el valor de la burbuja, o la sobreestimación del valor observado con respecto al valor fundamental de un activo, a tiempo t, lo que es acorde la descripción económica de este fenómeno dada en un comienzo. Se dice que el activo presenta una burbuja financiera en el tiempo t si β_t es positivo. Es importante notar que, gracias a que la esperanza de una supermartingala es decreciente en tiempo, entonces se tiene que si $\beta_t = 0$, entonces para todo s mayor que t, $\beta_s = 0$ (ver [6], teorema 3.2).

De lo anterior se desprende que, para identificar la existencia de una burbuja se debe estudiar cuándo ocurre que $S_t > \mathbb{E}\left(S_\infty|\mathcal{F}_t\right)$, o en otras palabras, en qué instantes el proceso de precio no se comporta como una martingala real, es decir, es una martingala local estricta. Esta deducción ha impulsado la investigación sobre cómo se comporta la propiedad de martingala en soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas que describen algún proceso de precio en modelos financieros.

Hasta ahora, la discusión se ha centrado en el estudio de procesos de precio generales (ver por ejemplo [12]), sin dar forma específica a la ecuación diferencial estocástica que rige su comportamiento. Sin embargo, este trabajo se enfoca en un tipo especial de procesos de precio: los llamados modelos de volatilidad estocástica. En estos casos, se considera que el proceso de precio S_t satisface una ecuación de la forma

$$\mathrm{d}S_t = f(S_t, \sigma_t)\mathrm{d}W_t + g(S_t, \sigma_t)\mathrm{d}t,$$

donde σ_t es ahora otro proceso, que sigue su propia ecuación diferencial estocástica, de la forma

$$\mathrm{d}\sigma_t = f'(\sigma_t)\mathrm{d}B_t + g'(\sigma_t)\mathrm{d}t,$$

donde W_t y B_t son movimientos brownianos con algún grado de dependencia. Hay que recordar además que es común no considerar la función g en los modelos, pues gracias al cambio de medida que ofrece el teorema 0.1, el proceso de precio puede ser considerado una martingala local, eliminando así su componente de drift.

Ya en 1998 (ver [16]) se obtienen resultados sobre casos donde las funciones f' y g' son lineales, mientras que la función f es una potencia en σ_t y lineal en el precio. La dependencia de los movimientos brownianos en estos casos queda implícita dentro de los parámetros que se eligen. Más adelante (ver [2]) se estudia el caso donde f es lineal en ambas variables y tanto f' como g' son lineales. En este caso, se formaliza la dependencia entre los movimientos brownianos llamándolos ρ-correlacionados. Se dice que W_t y B_t son ρ-correlacionados, donde ρ vive entre -1 y 1, si existe un movimiento browniano Z_t independiente de B_t tal que

$$W_t = \rho B_t + \sqrt{1-\rho^2} Z_t.$$

Esta noción de dependencia es la usada por varios trabajos posteriores que estudian este problema tanto desde el ámbito probabilista (visto hasta ahora) como desde el enfoque de las ecuaciones en derivadas parciales (ver por ejemplo [3], [11]).

Las formas de abordar este problema, junto con qué aspectos del proceso de precios recalcar, han sido variadas. Por ejemplo, [1] ataca nuevos casos dentro del mismo modelo, pero también introduce el estudio de la finitud de los diferentes momentos del proceso de precio (que tiene su propio interés en el área financiera); mientras que en [13], se encuentran resultados aplicables a este modelo a través de un método denominado tiempos de separación. No obstante, el primer acercamiento al modelo principal a tratar en este trabajo aparece en [11], en donde se estudia, desde una perspectiva de ecuaciones en derivadas parciales, el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}S_t &= S_t^\gamma \sigma_t^\alpha \mathrm{d}W_t, \quad S_0 = s > 0,\\
\mathrm{d}\sigma_t &= K\sigma_t^\beta \mathrm{d}B_t + b(\sigma_t)\mathrm{d}t, \quad \sigma_0 > 0,
\end{aligned}$$

donde W_t y B_t son ρ-correlacionados, b es una función localmente Lipschitz con crecimiento a lo más lineal y todos los parámetros son positivos. Se restringen aún más los parámetros β y γ a ser menores que o iguales a 1, y se encuentran resultados importantes sobre el comportamiento de martingala del proceso S_t, junto con información sobre la finitud de sus momentos. Hay también resultados para funciones generales en la ecuación de volatilidad, pero siempre restringiendo el crecimiento de las funciones a no más que lineal.

El método de ecuaciones en derivadas parciales parece restringir el alcance de los resultados encontrados ya que en [5], se procede a generalizar, a través de argumentos del cálculo estocástico, lo hecho para el caso donde la ecuación es

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S_t &= S_t\sigma_t^{\alpha}\mathrm{d}W_t, \quad S_0 = s > 0, \\ \mathrm{d}\sigma_t &= \sigma_t^{\beta}\mathrm{d}B_t, \quad \sigma_0 > 0, \end{aligned}$$

con todos los parámetros positivos y los movimientos brownianos ρ-correlacionados, pero sin restricciones sobre α y β. Vale mencionar que la dependencia de tanto γ como K desaparecen del problema y no se tratan; pero aún así el trabajo logra caracterizar a cabalidad la propiedad de martingala del proceso de precio dependiendo del valor de sus parámetros.

Basándose en lo hecho en [5], este trabajo pretende caracterizar cómo se comporta la propiedad de martingala de un proceso de precio que se rige por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S_t &= S_t\sigma_t^{\alpha}\mathrm{d}W_t, \quad S_0 = s > 0, \\ \mathrm{d}\sigma_t &= \sigma_t^{\beta}\mathrm{d}B_t + K\sigma_t^{\delta}\mathrm{d}t, \quad \sigma_0 > 0, \end{aligned}$$

donde se agrega un término de drift a la ecuación de volatilidad, sin restricción alguna sobre los valores de K y δ. Más aun, se elimina la restricción de positividad sobre β. Esto último no es directamente aplicable desde un punto de vista financiero, pero es un problema matemático interesante de por sí. En el capítulo 1 se presentan las herramientas avanzadas del cálculo estocástico necesarias para llevar a cabo el análisis propuesto. El capítulo 2 discute para qué valores de β, K y δ tiene sentido el modelo propuesto como un sistema de precios, estudiando el comportamiento explosivo de la ecuación de volatilidad. Con esto, el capítulo 3 pasa a definir cuáles son los valores de los parámetros que, dentro del marco establecido en el capítulo 2, hacen que la solución sea una martingala real o si queda como una martingala local estricta.

Finalmente se pretende presentar caminos posibles para poder generalizar los resultados encontrados en este caso a modelos con drift polinomial, junto con eliminar la restricción de positividad de α. También se propone incorporar al análisis el parámetro γ del modelo de [11], que desaparece en [5]. Esto pretende lograr una descripción completa de un modelo que resulta crucial para poder comprender un fenómeno tan particular como lo son las burbujas financieras y, quizás en el futuro, aplicarlo a problemas totalmente ajenos al área de la economía.

Capítulo 1

Preliminares

Antes de comenzar con los análisis pertinentes al tema principal de este trabajo, se deben primero esclarecer algunos resultados conocidos en el área del cálculo estocástico que, a pesar de no ser de importancia general, son cruciales para el estudio de ecuaciones diferenciales estocásticas y forman parte de la base teórica de las matemáticas financieras. De más está decir que, para poder comprender por completo lo expuesto, es necesario tener un entendimiento profundo de la teoría de probabilidades básicas, junto con un manejo avanzado de los fundamentos matemáticos de integración estocástica.

1.1. Teorema de Girsanov

El objetivo de este resultado, el teorema de Girsanov, es, dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ en el cual se pretende cambiar la medida a otra, $\tilde{\mathbb{P}}$, que tiene una forma específica, caracterizar el efecto que esto tiene sobre un movimiento browniano estándar y otras martingalas locales continuas definidas en el espacio original. Tiene consecuencias importantes en el estudio de los procesos conocidos como movimientos brownianos con drift, usados muy comunmente al modelar procesos de precios en finanzas, transformándolos en movimientos brownianos estándar y simplificando su análsis, como se ve en ejemplos más adelante.

Se comienza considerando un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, en donde se define un movimiento browniano estándar $(W_t)_{t\geq 0}$ con su filtración asociada $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ que cumple las condiciones habituales. Ahora, sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso medible, adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, que además satisface que

$$\mathbb{P}\left[\int_0^t X_s^2 \mathrm{d}s < \infty\right] = 1 \ \forall t \in [0, \infty). \tag{1.1}$$

Así, se puede definir la integral estocástica de X con respecto a W, $\int_0^t X_s \mathrm{d}W_s$, y este proceso resulta ser una martingala local continua. Con todos estos elementos ya fijos, se puede entonces definir la martingala exponencial de X con respecto a W, la cual se denota $\xi(X)$, como

$$\xi(X)_t = \exp\left\{\int_0^t X_s \mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^t X_s^2 \mathrm{d}s\right\}. \tag{1.2}$$

Se puede aplicar la fórmula de Itô (ver [10], teorema 3.3.3) a la semimartingala

$$S_t = \int_0^t X_s \mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^t X_s^2 \mathrm{d}s,$$

que tiene como su componente de martingala local a $\int_0^t X_s \mathrm{d}W_s$ y como su componente de variación acotada a $\frac{1}{2}\int_0^t X_s^2 \mathrm{d}s$. Así, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\xi(X)_t &= \exp(S_t) = f(S_t) \\
&= f(S_0) + \int_0^t f'(S_s) X_s \mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^t f'(S_s) X_s^2 \mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(S_s) X_s^2 \mathrm{d}\langle W\rangle_s \\
&= 1 + \int_0^t \exp(S_s) X_s \mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^t \exp(S_s) X_s^2 \mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_0^t \exp(S_s) X_s^2 \mathrm{d}s \\
&= 1 + \int_0^t \exp(S_s) X_s \mathrm{d}W_s = 1 + \int_0^t \xi(X)_s X_s \mathrm{d}W_s,
\end{aligned}$$

y por ende (1.2) resuelve la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Y_t &= Y_t X_t \mathrm{d}W_t, \\
Y_0 &= 1,
\end{aligned}$$

además de ser una martingala local, pues es la integral estocástica de un proceso continuo, $\xi(X)_t$ con respecto a la martingala local $\int_0^t X_s \mathrm{d}W_s$. Notando además que el proceso es obviamente positivo, se concluye que es una supermartingala, que además satisface $\xi(X)_0 = 1$. Sin embargo, no se puede asegurar si este proceso es o no una martingala real. Cuando lo es, se tiene entonces que $\mathbb{E}(\xi(X)_t) = 1$ para todo $t \geq 0$, y se puede definir la familia de medidas $(\mathbb{P}_t)_{t\geq 0}$ como

$$\mathbb{P}_t(A) = \mathbb{E}(1_A \xi(X)_t) \quad \forall A \in \mathcal{F}_t,$$

es decir, para cada $t \geq 0$, $\mathbb{P}_t$ es una medida absolutamente continua con respecto a $\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}$, cuya densidad coincide con $\xi(X)_t$. Además, la propiedad de martingala asegura que se tenga la siguiente propiedad. Sea $0 \leq s < t$, entonces para todo $A \in \mathcal{F}_s$

$$\mathbb{P}_t(A) = \mathbb{E}(1_A \xi(X)_t) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(1_A \xi(X)_t | \mathcal{F}_s\right)\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\xi(X)_t | \mathcal{F}_s\right) 1_A\right) = \mathbb{E}(1_A \xi(X)_s) = \mathbb{P}_s(A),$$

esto es, las medidas coinciden en las filtraciones más pequeñas. Vale mencionar que este mismo proceso se puede hacer aunque $\xi(X)$ no sea una martingala, pero en ese caso solamente tiene sentido hacerlo para $0 \leq t \leq T$, donde

$$T = \text{ínf}\left\{t \geq 0 : \mathbb{E}(\xi(X)_t) < 1\right\},$$

recordando que la función $t \to \mathbb{E}(\xi(X)_t)$ es decreciente debido a que $\xi(X)$ es una supermartingala.

Ahora, el siguiente teorema y proposiciones retratan la transformación que sufren en principio un movimiento browniano estandar en el espacio original y, más adelante, todas las martingalas locales continuas cuando son sometidas a este cambio de medida. Naturalmente no se puede esperar que mantengan sus propiedades definitorias, pero se identifica claramente como se modifica su ley debido al cambio.

Teorema 1.1 (ver [10], teorema 3.5.1.) *Girsanov (1960), Cameron & Martin (1944). En el contexto anterior, se supone que $\xi(X)$ es una martingala. Entonces el proceso $(B_t)_{t\geq 0}$ definido como*

$$B_t = W_t - \int_0^t X_s \mathrm{d}s \quad \forall\ 0 \leq t < \infty,$$

cumple que para todo $T \in [0, \infty)$ fijo, $(B_t)_{0\leq t\leq T}$ es un movimiento browniano estándar en el espacio $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}_T)$.

En otras palabras, este teorema dice que el cambio de medida transforma la ley de W desde un movimiento browniano estándar a la ley

$$B_t + \int_0^t X_s \mathrm{d}s,$$

que es un movimiento browniano perturbado por una término directamente asociado al proceso X que aparece gracias al cambio de medida. De la misma forma, la siguiente proposición generaliza este mismo efecto a las martingalas locales continuas.

Proposición 1.2 (ver [10], proposición 3.5.4.) *Bajo las mismas hipótesis del teorema anterior, sea $T \in [0, \infty)$ y sea M una martingala local continua en $[0, T]$. Entonces*

$$N_t = M_t - \int_0^t X_s \mathrm{d}\langle M, W\rangle_s \ ,\ 0 \leq t \leq T,$$

es una martingala local continua con respecto a la medida $\mathbb{P}_T$, y además se tiene que

$$\langle M\rangle_t = \langle N\rangle_t \ ,\ 0 \leq t \leq T \ ,\ \textit{c.s. con respecto a } \mathbb{P} \textit{ y } \mathbb{P}_T,$$

donde la variación cuadrática es calculada en el espacio correspondiente a cada una de las martingalas locales.

Estos resultados parecen de mucha utilidad, sin embargo consideran como hipótesis clave que el proceso $\xi(X)$ sea una martingala y, en principio, no existen herramientas directas para verificar dicha condición en el caso de procesos generales. Para esto, se introduce, como último resultado de esta sección, una condición suficiente para asegurar el buen comportamiento del proceso $\xi(X)$.

Proposición 1.3 (ver [10], proposición 3.5.13.) *Novikov (1972). Sea $(W_t)_{t\geq 0}$ un movimiento browniano estándar, y sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso medible adaptado que satisface (1.1). Entonces, si además se tiene que*

$$\mathbb{E}\left(\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T X_s^2 \mathrm{d}s\right\}\right) < \infty \quad \forall T \in [0, \infty),$$

entonces el proceso definido en (1.2) es una martingala.

Con todos estos resultados enunciados, se presenta una aplicación para dar fin a esta sección.

Ejemplo (Movimiento browniano con drift.) Sea $(W_t)_{t\geq 0}$ un movimiento browniano estándar definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ y sea $\mu \neq 0$. Se define entonces el proceso $B_t = W_t - \mu t$, $t \geq 0$, llamado movimiento browniano con drift μ.

Definiendo $X_t = \mu$ para todo $t \geq 0$, se nota que este proceso es directamente adaptado, medible y satisface que

$$\mathbb{P}\left[\int_0^T \mu^2 \mathrm{d}s < \infty\right] = \mathbb{P}\left[\mu^2 T < \infty\right] = 1 \quad \forall T \in [0,\infty),$$
$$\mathbb{E}\left(\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T \mu^2 \mathrm{d}s\right\}\right) = \mathbb{E}\left(\exp\left\{\frac{\mu^2 T}{2}\right\}\right) < \infty \quad \forall T \in [0,\infty),$$

lo que implica que el proceso $\xi(X)$ está bien definido y, aplicando el criterio de Novikov (proposición 1.3), es una martingala. Luego, usando el teorema 1.1, se puede concluir que para todo $T \in [0,\infty)$ fijo, el proceso

$$B_t = W_t - \mu t = W_t - \int_0^t X_s \mathrm{d}s,$$

restringido al intervalo $[0,T]$, es un movimiento browniano bajo la medida $\mathbb{P}_T$, definida como

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_T(A) = \mathbb{E}(1_A \xi(X)_T) &= \mathbb{E}\left(1_A \exp\left\{\int_0^T X_s \mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^T X_s^2 \mathrm{d}s\right\}\right)\\ &= \mathbb{E}\left(1_A \exp\left\{\mu W_T - \frac{\mu^2 T}{2}\right\}\right),\end{aligned}$$

De aquí se concluye que se puede revertir una modificación simple aplicada a un movimiento browniano para que siga teniendo el comportamiento deseado, a través de un cambio de medida totalmente explícito. Esta misma idea, pero aplicada a procesos más complejos que un movimiento browniano estándar, es importante en los argumentos usados en el capítulo 3.

1.2. Test de Explosión de Feller

Los resultados que se presentan en esta sección están relacionados con estudiar el comportamiento explosivo de una solución débil de una ecuación diferencial estocástica unidimensional y homogénea en tiempo, definida en un intervalo fijo, cuyos extremos pueden ser infinitos. Este test es central para todos los resultados presentados en los próximos capítulos y, por ende, para este trabajo en su totalidad.

Para comenzar, se define un intervalo

$$I = (l, r) \quad -\infty \leq l < r \leq \infty,$$

cuyos extremos pueden ser infinitos, y una ecuación diferencial estocástica de la forma

$$\mathrm{d}X_t = b(X_t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\mathrm{d}W_t, \tag{1.3}$$

donde las funciones involucradas deben satisfacer que

$$\begin{aligned} b : I \longrightarrow \mathbb{R} \quad & \sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \sigma(x) \neq 0 \quad & \forall x \in I, \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\forall x \in I \ , \exists \varepsilon > 0 \ , \ \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{1+|b(z)|}{\sigma^2(z)}\mathrm{d}z < \infty. \tag{1.5}$$

Ahora, se entiende a una solución débil de (1.3) en el intervalo I, como una solución débil natural de la ecuación (1.3), restringida al intervalo I. Obviamente esta solución puede no estar definida para todo tiempo, y se quiere caracterizar hasta qué tiempos se puede entender como válida. Más formalmente,

Definición 1.4 (ver [10], definición 5.20) *Una* ***solución débil de (1.3) en el intervalo*** *I es una tripleta (X,W), $(\Omega, \mathcal{F},\mathbb{P})$, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ tales que*

1. *$(\Omega, \mathcal{F},\mathbb{P})$ es un espacio de probabilidad, donde $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ es una filtración que satisface las condiciones habituales.*
2. *$X = (X_t)_{t\geq 0}$ es un proceso continuo, adaptado a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ a valores en $[l,r]$, tal que $X_0 \in I$ c.s. y $W = (W_t)_{t\geq 0}$ es un $(\mathcal{F}_t)_t$-movimiento browniano.*
3. *Existen sucesiones estrictamente monótonas $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que*

$$\begin{gathered} l_n \xrightarrow{n\to\infty} l \quad r_n \xrightarrow{n\to\infty} r, \\ l < l_n < r_n < r \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{gathered}$$

y, al definir

$$T_n = \text{ínf}\left\{t > 0 : X_t \notin (l_n, r_n)\right\},$$

se cumple que, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}\left[\int_0^{t\wedge T_n} b(X_s) + \sigma^2(X_s)\mathrm{d}s < \infty\right] = 1 \quad \forall t \in [0,\infty),$$

y también

$$\mathbb{P}\left[X_{t\wedge T_n} = X_0 + \int_0^t 1_{s\leq T_n} b(X_s)\mathrm{d}s + \int_0^t 1_{s\leq T_n}\sigma(X_s)\mathrm{d}W_s \ , \forall t \in [0,\infty)\right] = 1.$$

Se entiende como el **tiempo de explosión** de la solución al tiempo

$$T = \text{ínf}\left\{t > 0 : X_t \notin (l,r)\right\} = \lim_{n\to\infty} T_n,$$

y, como $X_0 \in I$ c.s., se tiene que $\mathbb{P}[T > 0] = 1$. De la misma forma, se puede definir

$$T_r = \text{ínf}\{t > 0 : X_t = r\},$$
$$T_l = \text{ínf}\{t > 0 : X_t = l\},$$

de donde

$$T = T_r \wedge T_l.$$

Por otra parte, gracias a las condiciones (1.4) y (1.5), se pueden construir dos funciones que son cruciales para el análisis posterior. Para un $c \in I$ fijo cualquiera, se definen

$$p : I \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$p(x) = \int_c^x \exp\left\{-2\int_c^y \frac{b(z)}{\sigma^2(z)}\mathrm{d}z\right\}\mathrm{d}y, \tag{1.6}$$
$$v : I \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$
$$v(x) = \int_c^x p'(y)\int_c^y \frac{2}{p'(z)\sigma^2(z)}\mathrm{d}z\mathrm{d}y, \tag{1.7}$$

y, para estas funciones, se definen

$$p(r) = \lim_{x\uparrow r} p(x)\ ,\ p(l) = \lim_{x\downarrow l} p(x),$$
$$v(r) = \lim_{x\uparrow r} v(x)\ ,\ v(l) = \lim_{x\downarrow l} v(x),$$

cuyos valores, o más precisamente su finitud, caracterizan el comportamiento de explosión de una solución débil de (1.3) en el intervalo I, gracias a los resultados presentados más adelante. Antes de enunciar el teorema principal de esta sección, se necesitan un par de resultados que generalizan el comportamiento de las funciones definidas anteriormente.

Teorema 1.5 (ver [10], problema 5.5.27)

$$p(r) = \infty \Rightarrow v(r) = \infty,$$
$$p(l) = -\infty \Rightarrow v(l) = \infty.$$

Teorema 1.6 (ver [10], problema 5.5.12 y 5.5.28) *La finitud de $p(r)$, $p(l)$, $v(r)$ y $v(l)$ no depende de la elección de $c \in I$.*

Con todas estas herramientas, se puede presentar el resultado final de esta sección

Teorema 1.7 (ver [10], sección 5.5.C) *Test de Explosión de Feller. Sea X_t una solución débil de (1.3) en el intervalo $I = (l, r)$, tal que $X_0 = x \in I$ determinista. Entonces los comportamientos de T, T_r, T_l y X_T se rigen de acuerdo a la siguiente tabla:*

	$p(l) = -\infty$	$p(l) > -\infty$ $v(l) = \infty$	$v(l) < \infty$
$p(r) = \infty$	$\mathbb{P}(T = \infty) = 1$ $\mathbb{P}\left[\sup_{0 \le t < \infty} X_t = r\right] = 1$ $\mathbb{P}\left[\text{ínf}_{0 \le t < \infty} X_t = l\right] = 1$	$\mathbb{P}(T = \infty) = 1$ $\mathbb{P}\left[\sup_{0 \le t < T} X_t < r\right] = 1$ $\mathbb{P}\left[\text{lím}_{t \uparrow T} X_t = l\right] = 1$	$\mathbb{P}(T_r = \infty) = 1$ $\mathbb{P}(T = T_l < \infty) = 1$ $\mathbb{P}\left[\sup_{0 \le t < T} X_t < r\right] = 1$ $\mathbb{P}\left[\text{lím}_{t \uparrow T} X_t = l\right] = 1$
$p(r) < \infty$ $v(r) = \infty$	$\mathbb{P}(T = \infty) = 1$ $\mathbb{P}\left[\text{lím}_{t \uparrow T} X_t = r\right] = 1$ $\mathbb{P}\left[\text{ínf}_{0 \le t < T} X_t > l\right] = 1$	$\mathbb{P}(T = \infty) = 1$ $\mathbb{P}\left[\text{lím}_{t \uparrow T} X_t = r\right] = k'(x)$ $\mathbb{P}\left[\text{lím}_{t \uparrow T} X_t = l\right] = k(x)$	$\mathbb{P}(T_r = \infty) = 1$ $\mathbb{P}(T_l = \infty) < 1$ $\mathbb{P}(T = \infty) \in (0, 1)$ $\mathbb{P}\left[\text{lím}_{t \uparrow T} X_t = r\right] = k'(x)$ $\mathbb{P}\left[\text{lím}_{t \uparrow T} X_t = l\right] = k(x)$
$v(r) < \infty$	$\mathbb{P}(T_l = \infty) = 1$ $\mathbb{P}(T = T_r < \infty) = 1$ $\mathbb{P}\left[\text{lím}_{t \uparrow T} X_t = r\right] = 1$ $\mathbb{P}\left[\text{ínf}_{0 \le t < T} X_t > l\right] = 1$	$\mathbb{P}(T_l = \infty) = 1$ $\mathbb{P}(T_r = \infty) < 1$ $\mathbb{P}(T = \infty) \in (0, 1)$ $\mathbb{P}\left[\text{lím}_{t \uparrow T} X_t = r\right] = k'(x)$ $\mathbb{P}\left[\text{lím}_{t \uparrow T} X_t = l\right] = k(x)$	$\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ $\mathbb{P}\left[\text{lím}_{t \uparrow T} X_t = r\right] = k'(x)$ $\mathbb{P}\left[\text{lím}_{t \uparrow T} X_t = l\right] = k(x)$

Tabla 1.1: Resumen de resultados asociados al Test de Feller.

donde

$$k(x) = \frac{p(r) - p(x)}{p(r) - p(l)} \in (0, 1),$$
$$k'(x) = 1 - k(x).$$

Observación : Dentro del teorema anterior queda entre lineas una condición que resulta crucial para el estudio que se realiza en los capítulos posteriores, la cual tiene que ver con como se relacionan $v(r)$ y $v(l)$ con T_r y T_l respectivamente. Es directo ver que

$$v(r) = \infty \Longleftrightarrow \mathbb{P}(T_r = \infty) = 1,$$
$$v(l) = \infty \Longleftrightarrow \mathbb{P}(T_l = \infty) = 1.$$

Capítulo 2

Ecuación de Volatilidad

Para comenzar, es necesario dar criterios para identificar cuando la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma_t &= \sigma_t^{\beta}\mathrm{d}B_t + b(\sigma_t)\mathrm{d}t, \\ \sigma_0 &> 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $\beta \in \mathbb{R}$, tiene una solución única débil en $(0,\infty)$, que además no explota hacia infinito con probabilidad 1. Gracias a un resultado previo (ver [9]), la ecuación (2.1) tiene una única solución débil positiva (hasta un posible tiempo de explosión hacia 0 o ∞) si y solo si

$$\frac{|b(x)|}{x^{2\beta}} \in L^1_{\text{loc}}((0,\infty)). \tag{2.2}$$

En lo que sigue son importantes las siguientes definiciones de tiempos de parada que describen la explosión de la ecuación (2.1)

$$T_0 = \text{ínf}\left\{t \geq 0 : \sigma_t = 0\right\}, \tag{2.3}$$

$$T_M = \text{ínf}\left\{t \geq 0 : \sigma_t \geq M\right\}, \tag{2.4}$$

$$T_\infty = \lim_{M\to\infty} T_M, \tag{2.5}$$

$$T = T_0 \wedge T_\infty. \tag{2.6}$$

Lo primero que hay que notar es que, en el caso de una explosión hacia 0, es decir $T = T_0 < \infty$, se puede corregir el comportamiento de σ_t deteniendo el proceso en T_0. Esto se traduce en tomar $\sigma_t = 0$, $\forall t \geq T_0$, y se reduce a estudiar dicha evolución solamente hasta T_0, lo que elimina el problema de la explosión hacia 0. No obstante es importante controlar cuando la solución de (2.1) explota hacia infinito, pues si esto ocurre se pierde el sentido del modelo y no es posible corregirlo de forma sencilla como en el caso anterior. Para poder estudiar este fenómeno, se deben primero introducir las funciones de escala asociadas a la ecuación (2.1)

$$\begin{aligned} &p(x) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \\ &p(x) = \int_1^x \exp\left\{-2\int_1^y \frac{b(\xi)}{\xi^{2\beta}}\mathrm{d}\xi\right\}\mathrm{d}y, && (2.7) \\ &v(x) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, \\ &v(x) = \int_1^x p'(y)\int_1^y \frac{2}{p'(z)z^{2\beta}}\mathrm{d}z\mathrm{d}y. && (2.8) \end{aligned}$$

Con esto ya definido, gracias al Test de Feller (ver teorema 1.7), se tiene que

$$\mathbb{P}(T_\infty = \infty) = 1 \Longleftrightarrow \lim_{x\to\infty} v(x) = \infty, \tag{2.9}$$

luego, basta que $b(x)$ satisfaga la condición sobre la función $v(x)$ y la condición (2.2) para concluir que la solución σ_t de (2.1) cumple lo deseado. Ahora bien, la verificación de tanto (2.2) como (2.9) para un $b(x)$ específico puede ser un tanto engorrosa, por lo que el enfoque queda sobre el caso $b(x) = Kx^\delta$, $\delta \neq 0$, $K \neq 0$ (el caso $\delta = 0$ se estudia más adelante).

Para esto, hay que notar que la función, con dominio en $\mathbb{R}_+$,

$$\frac{|b(x)|}{x^{2\beta}} = |K|x^{\delta-2\beta} \in L^1_{loc}((0,\infty))\ ,\ \forall\delta\neq 0,$$

luego, siempre existe una solución única débil de (2.1) en este caso. Ahora hay que ver en qué casos esta solución es explosiva. Si no lo es, se denota como una solución **buena**, y en caso contrario como una solución **mala**. Para comenzar, se ve que, en este caso,

$$p'(x) = \exp\left\{-2\int_1^x Ky^{\delta-2\beta}\mathrm{d}y\right\}, \tag{2.10}$$

de donde se pueden identificar 3 variantes distintas dependiendo de los valores de β y δ.

El primer caso, y el más directo de resolver, es $\delta = 2\beta - 1$. Aquí se tiene que

$$p'(x) = \exp\left\{-2K\int_1^x y^{\delta-2\beta}\mathrm{d}y\right\} = \exp\left\{-2K\int_1^x y^{-1}\mathrm{d}y\right\} = \exp\{-2K\ln(x)\} = \frac{1}{x^{2K}},$$

y así, se obtiene

$$(2.8) = \int_1^x \frac{1}{y^{2K}}\int_1^y 2z^{2K-2\beta}\mathrm{d}z\mathrm{d}y, \tag{2.11}$$

donde nuevamente hay que separar el análisis en dos casos distintos: $\beta = \frac{2K+1}{2}$ y $\beta \neq \frac{2K+1}{2}$. Si $\beta = \frac{2K+1}{2}$ se tiene entonces que $\delta = 2K$ y además

$$v(x) = \int_1^x \frac{1}{y^{2K}}\int_1^y 2z^{-1}\mathrm{d}z\mathrm{d}y = \int_1^x \frac{2}{y^{2K}}\ln(y)\mathrm{d}y, \tag{2.12}$$

donde conviene de nuevo considerar los diferentes casos, $K < 1/2$, $K = 1/2$ y $K > 1/2$. Si $K < 1/2$, integrando por partes se llega a que

$$\begin{aligned}(2.12) &= \left(\frac{2\ln(y)y^{1-2K}}{1-2K}\right)\Bigg|_1^x - \int_1^x \frac{2}{y^{2K}(1-2K)}\mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{1-2K}\left(\ln(x)x^{1-2K} - \frac{x^{1-2K}}{1-2K} + \frac{1}{1-2K}\right) \xrightarrow{x\to\infty} \infty,\end{aligned}$$

pues $1 - 2K > 0$, de donde se concluye que en este caso la solución es **buena** y se puede estudiar más adelante.

Ahora, si $K = 1/2$ entonces, haciendo el cambio de variable $u = \ln(y)$, y por ende $\mathrm{d}u = y^{-1}\mathrm{d}y$, en (2.12) se llega a

$$(2.12) = 2\int_0^{\ln(x)} u\mathrm{d}u = \ln(x)^2 \xrightarrow{x\to\infty} \infty,$$

y así, la solución para $K = 1/2$ también es **buena**. Finalmente, si $K > 1/2$, se puede integrar por partes para obtener

$$\begin{aligned}(2.12) &= \left(\frac{2\ln(y)}{(1-2K)y^{2K-1}}\right)\Bigg|_1^x - \int_1^x \frac{2}{y^{2K}(1-2K)}\mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{1-2K}\left(\frac{\ln(x)}{x^{2K-1}} - \frac{1}{(1-2K)x^{2K-1}} + \frac{1}{1-2K}\right) \xrightarrow{x\to\infty} \frac{2}{(1-2K)^2} < \infty,\end{aligned}$$

ya que $2K - 1 > 0$, y entonces en este caso la solución es **mala**, y no sirve para el análisis posterior.

El siguiente paso es considerar $\beta \neq \frac{2K+1}{2}$, donde hay que estudiar el término

$$\begin{aligned}(2.11) &= \int_1^x \frac{1}{y^{2K}}\frac{2}{2K-2\beta+1}(y^{2K-2\beta+1}-1)\mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{2K-2\beta+1}\left(\int_1^x y^{1-2\beta} - y^{-2K}\mathrm{d}y\right), \qquad (2.13)\end{aligned}$$

y nuevamente hay que separar los diferentes casos $\beta = 1$ y $K = 1/2$, notando que no pueden pasar simultáneamente pues $\beta \neq \frac{2K+1}{2}$. Comenzando con $\beta = 1$, $K \neq 1/2$, se obtiene

$$(2.13) = \frac{2}{2K-1}\left(\int_1^x y^{-1} - y^{-2K}\mathrm{d}y\right) = \frac{2}{2K-1}\left(\ln(x) - \frac{x^{-2K+1}}{1-2K} + \frac{1}{1-2K}\right),$$

donde este último término va a ∞ cuando x va a ∞ independiente del valor de K, luego siempre se obtiene una solución **buena** con $\beta = 1 \neq \frac{2K+1}{2}$. Ahora hay que analizar el caso $\beta \neq 1$, $K = 1/2$, en donde

$$(2.13) = \frac{2}{2-2\beta}\left(\int_1^x y^{1-2\beta} - y^{-1}\mathrm{d}y\right) = \frac{2}{2-2\beta}\left(\frac{x^{2-2\beta}}{2-2\beta} - \frac{1}{2-2\beta} - \ln(x)\right),$$

donde nuevamente el último término va a ∞ cuando x va a ∞ independiente del valor de β, y por ende toda solución es **buena** en este caso. Finalmente hay que estudiar el caso general cuando $\beta \neq 1$ y $K \neq 1/2$, donde el término clave se reduce a

$$
\begin{aligned}
(2.13) &= \frac{2}{2K-2\beta+1}\left(\frac{x^{2-2\beta}}{2-2\beta} - \frac{1}{2-2\beta} - \frac{x^{1-2K}}{1-2K} + \frac{1}{1-2K}\right) \\
&= \frac{2}{(2K-2\beta+1)(2-2\beta)}x^{2-2\beta} + \frac{2}{(2K-2\beta+1)(2K-1)}x^{1-2K} + C, \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

donde C es una constante que no forma parte del análisis. Para completar la descripción de esta parte, parece natural estudiar 8 casos distintos dependiendo del signo de las expresiones que aparecen en el último término:

1. $2K-2\beta+1>0$, $2-2\beta>0$ y $2K-1>0$: este caso se reduce a $\beta<1$ y $K>1/2$, y se ve claramente que (2.14) va a ∞ a medida que x crece, luego es una solución **buena**.
2. $2K-2\beta+1>0$, $2-2\beta>0$ y $2K-1<0$: aquí las condiciones se resumen en $K<1/2$ y $\beta<\frac{2K+1}{2}$ y nuevamente (2.14) va a ∞ cuando x crece, y la solución es **buena**.
3. $2K-2\beta+1>0$, $2-2\beta<0$ y $2K-1>0$: ahora las desigualdades entregan $\beta>1$, $K>1/2$ y $\beta<\frac{2K+1}{2}$, pero en este caso (2.14) va a C cuando x crece, luego la solución es **mala**.
4. $2K-2\beta+1<0$, $2-2\beta>0$ y $2K-1>0$: basta notar que esta situación no ocurre nunca pues $\beta<1$, pero al mismo tiempo $\beta>\frac{2K+1}{2}$ y $K>1/2$, luego $\beta>1$.
5. $2K-2\beta+1>0$, $2-2\beta<0$ y $2K-1<0$: nuevamente esta es una combinación que no puede suceder ya que se tiene que $\beta>1$, pero a la vez $\beta<\frac{2K+1}{2}$ con $K<1/2$, y entonces $\beta<1$.
6. $2K-2\beta+1<0$, $2-2\beta<0$ y $2K-1>0$: esta situación se traduce a que $\beta>\frac{2K+1}{2}$ y $K>1/2$. No obstante, en este caso (2.14) va a C cuando x crece, luego se obtiene una solución **mala**.
7. $2K-2\beta+1<0$, $2-2\beta>0$ y $2K-1<0$: en este caso, las desigualdades fuerzan a que $\beta\in\left(\frac{2K+1}{2},1\right)$, donde $K<1/2$, y con esto se puede ver que (2.14) diverge a ∞ cuando x crece, y por ende la solución es **buena**.
8. $2K-2\beta+1<0$, $2-2\beta<0$ y $2K-1<0$: finalemente, estas devienen en las condiciones $\beta>1$ y $K<1/2$, las cuales llevan a que (2.14) vaya a ∞ cuando x crece, dando nuevamente una solución **buena**.

Todos los resultados anteriores se pueden resumir en la siguiente proposición

Proposición 2.1 *La ecuación diferencial estocástica*

$$
\begin{gathered}
\mathrm{d}\sigma_t = \sigma_t^{\beta}\mathrm{d}B_t + K\sigma_t^{2\beta-1}\mathrm{d}t, \\
\sigma_0 > 0,
\end{gathered}
$$

tiene una única solución débil positiva (hasta un posible tiempo de explosión) para todo $K\neq 0$ y $\beta\in\mathbb{R}$. Más aún, esta solución no explota hacia infinto si y solo si se cumple alguna de estas condiciones

1. *$K\leq 1/2$,*

2. $\beta \leq 1$ y $K > 1/2$.

Es importante notar que se conoce que el caso $K = 0$ es no explosivo (ver [10], Problema 5.5.3).

Ahora que se ha caracterizado el caso $\delta = 2\beta - 1$, se procede a estudiar el caso en cuando esta igualdad no se cumple. Así, se tiene que

$$\begin{aligned}(2.10) &= \exp\left\{-2K\left(\frac{x^{\delta-2\beta+1}}{\delta-2\beta+1} - \frac{1}{\delta-2\beta+1}\right)\right\} \\ &= \exp\left\{-2K\frac{x^{\delta-2\beta+1}}{\delta-2\beta+1}\right\}\exp\left\{\frac{2K}{\delta-2\beta+1}\right\} = C_0\exp\left\{\frac{-2K}{\delta-2\beta+1}x^{\delta-2\beta+1}\right\},\end{aligned}$$

donde C_0 es una constante positiva. Con esto, y definiendo $\theta = \delta - 2\beta + 1$, se obtiene que

$$(2.8) = 2\int_1^x \exp\left\{\frac{-2K}{\theta}y^\theta\right\}\int_1^y \exp\left\{\frac{2K}{\theta}z^\theta\right\}z^{-2\beta}\mathrm{d}z\mathrm{d}y. \tag{2.15}$$

Para seguir se nota que es natural nuevamente estudiar por separado los casos $\theta > 0$ y $\theta < 0$. En cualquier caso, es importante que aunque esta integral sea difícil de calcular explícitamente, solamente interesa su comportamiento cuando x crece a infinito. Una forma de estudiar esto sin calcular las integrales es usar el método de comparación de cuociente para integrales (ver, por ejemplo [5], teorema 9).

Se comienza con $\theta > 0$, más aun considerando el caso donde $K > 0$ en primera instancia. Es claro entonces que

$$\exp\left\{\frac{2K}{\theta}x^\theta\right\}x^{-2\beta} \xrightarrow{x\to\infty} \infty,$$

lo que implica además, gracias a la positividad de las funciones, que

$$\int_1^y \exp\left\{\frac{2K}{\theta}z^\theta\right\}z^{-2\beta}\mathrm{d}z \xrightarrow{y\to\infty} \infty. \tag{2.16}$$

Luego, definiendo

$$f(y) = \exp\left\{\frac{-2K}{\theta}y^\theta\right\}\int_1^y \exp\left\{\frac{2K}{\theta}z^\theta\right\}z^{-2\beta}\mathrm{d}z,$$

se tiene que

$$\lim_{y\to\infty}\frac{f(y)}{y^{-\delta}} = \lim_{y\to\infty}\frac{\int_1^y \exp\left\{\frac{2K}{\theta}z^\theta\right\}z^{-2\beta}\mathrm{d}z}{\exp\left\{\frac{2K}{\theta}y^\theta\right\}y^{-\delta}},$$

de donde, gracias a (2.16), se puede aplicar la regla de L'Hôpital para concluir que

$$\begin{aligned}\lim_{y\to\infty}\frac{\int_1^y \exp\left\{\frac{2K}{\theta}z^\theta\right\}z^{-2\beta}\mathrm{d}z}{\exp\left\{\frac{2K}{\theta}y^\theta\right\}y^{-\delta}} &= \lim_{y\to\infty}\frac{\exp\left\{\frac{2K}{\theta}y^\theta\right\}y^{-2\beta}}{\exp\left\{\frac{2K}{\theta}y^\theta\right\}(-\delta y^{-\delta-1} + 2Ky^{\theta-\delta-1})} \\ &= \lim_{y\to\infty}\frac{1}{-\delta y^{-\theta} + 2K} = \frac{1}{2K} \in (0,\infty),\end{aligned}$$

debido a que $\theta > 0$. Con esto, y aplicando el criterio de convergencia de integrales del cuociente, se obtiene que

$$\lim_{x\to\infty} v(x) = 2\int_1^\infty f(y)\mathrm{d}y \sim \int_1^\infty y^{-\delta}\mathrm{d}y,$$

donde esta última integral es infinita si y solo si $\delta \leq 1$. Esto demuestra el siguiente resultado

Proposición 2.2 *La ecuación diferencial estocástica*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma_t &= \sigma_t^\beta \mathrm{d}B_t + K\sigma_t^\delta \mathrm{d}t, \\ \sigma_0 &> 0, \end{aligned}$$

*tiene una única solución débil positiva (hasta un posible tiempo de explosión) para todo $K \neq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ y $\delta \neq 0$. Más aún, si $K > 0$ y $\beta < \frac{1+\delta}{2}$ (es decir, $\theta > 0$), entonces la solución es **buena** si y solo si $\delta \leq 1$.*

Con este resultado listo, se puede continuar con el caso $\theta > 0$, $K < 0$. En esta situación es fácil ver que, como $K < 0$, entonces

$$\begin{aligned} \exp\left\{\frac{-2K}{\theta}y^\theta\right\}\int_1^y \exp\left\{\frac{2K}{\theta}z^\theta\right\} z^{-2\beta}\mathrm{d}z &\geq \exp\left\{\frac{-2K}{\theta}y^\theta\right\}\exp\left\{\frac{2K}{\theta}y^\theta\right\}\int_1^y z^{-2\beta}\mathrm{d}z \\ &= \int_1^y z^{-2\beta}\mathrm{d}z, \end{aligned}$$

luego integrando desde 1 hasta x, y como las funciones involucradas son positivas, se obtiene que

$$(2.15) = 2\int_1^x \exp\left\{\frac{-2K}{\theta}y^\theta\right\}\int_1^y \exp\left\{\frac{2K}{\theta}z^\theta\right\} z^{-2\beta}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \geq 2\int_1^x\int_1^y z^{-2\beta}\mathrm{d}z\mathrm{d}y, \qquad (2.18)$$

y así, se concluye que si la integral doble que acota a $v(x)$ explota a infinito cuando x va a infinito, también lo hace $v(x)$, y la solución asociada al caso resulta ser **buena**.

El estudio de esta integral doble se reduce a los siguientes casos

1. $\beta = 1/2$:

$$\begin{aligned} \int_1^x\int_1^y z^{-2\beta}\mathrm{d}z\mathrm{d}y &= \int_1^x\int_1^y z^{-1}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\ &= \int_1^x \ln(y)\mathrm{d}z = x\ln(x) - x + 1 \xrightarrow{x\to\infty} \infty. \end{aligned}$$

2. $\beta = 1$:

$$\begin{aligned} \int_1^x\int_1^y z^{-2\beta}\mathrm{d}z\mathrm{d}y &= \int_1^x \left\{\frac{y^{1-2\beta}}{1-2\beta} - \frac{1}{1-2\beta}\right\}\mathrm{d}y \\ &= \int_1^x 1 - \frac{1}{y}\mathrm{d}y = x - 1 - \ln(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty. \end{aligned}$$

3. $\beta < 1/2$:

$$\begin{aligned}
\int_1^x \int_1^y z^{-2\beta} \mathrm{d}z\mathrm{d}y &= \int_1^x \left\{ \frac{y^{1-2\beta}}{1-2\beta} - \frac{1}{1-2\beta} \right\} \mathrm{d}y \\
&= \frac{x^{2-2\beta}}{(2-2\beta)(1-2\beta)} - \frac{1}{(2-2\beta)(1-2\beta)} - \frac{x}{1-2\beta} + \frac{1}{1-2\beta} \\
&= \frac{x^{2-2\beta}}{1-2\beta} \left(\frac{1}{2-2\beta} - \frac{1}{(2-2\beta)x^{2-2\beta}} - \frac{1}{x^{2-2\beta-1}} + \frac{1}{x^{2-2\beta}} \right) \xrightarrow{x\to\infty} \infty,
\end{aligned}$$

pues en este caso $1-2\beta > 0$ y $2-2\beta > 1$.

4. $\beta \in (1/2, 1)$:

$$\begin{aligned}
\int_1^x \int_1^y z^{-2\beta} \mathrm{d}z\mathrm{d}y &= \int_1^x \left\{ \frac{y^{1-2\beta}}{1-2\beta} - \frac{1}{1-2\beta} \right\} \mathrm{d}y \\
&= \frac{x^{2-2\beta}}{(2-2\beta)(1-2\beta)} - \frac{1}{(2-2\beta)(1-2\beta)} - \frac{x}{1-2\beta} + \frac{1}{1-2\beta} \\
&= \frac{x}{2\beta-1} \left(\frac{-1}{(2-2\beta)x^{1-(2-2\beta)}} + \frac{1}{(2-2\beta)x} + 1 - \frac{1}{x} \right) \xrightarrow{x\to\infty} \infty,
\end{aligned}$$

ya que ahora $(2-2\beta) \in (0,1)$ y $1-2\beta < 0$.

5. $\beta > 1$:

$$\begin{aligned}
\int_1^x \int_1^y z^{-2\beta} \mathrm{d}z\mathrm{d}y &= \int_1^x \left\{ \frac{y^{1-2\beta}}{1-2\beta} - \frac{1}{1-2\beta} \right\} \mathrm{d}y \\
&= \frac{x^{2-2\beta}}{(2-2\beta)(1-2\beta)} - \frac{1}{(2-2\beta)(1-2\beta)} - \frac{x}{1-2\beta} + \frac{1}{1-2\beta} \\
&= \frac{x}{2\beta-1} \left(\frac{1}{(2\beta-2)x^{1-(2-2\beta)}} - \frac{1}{(2\beta-2)x} + 1 - \frac{1}{x} \right) \xrightarrow{x\to\infty} \infty,
\end{aligned}$$

porque aquí tanto $2-2\beta$ como $1-2\beta$ son negativos.

Los cálculos anteriores permiten concluir la siguiente proposición

Proposición 2.3 *La única solución débil positiva (hasta un posible tiempo de explosión) de la ecuación diferencial estocástica*

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\sigma_t &= \sigma_t^\beta \mathrm{d}B_t + K\sigma_t^\delta \mathrm{d}t, \\
\sigma_0 &> 0,
\end{aligned}$$

es siempre ***buena*** *cuando $K < 0$ y $\beta < \frac{1+\delta}{2}$ (es decir $\theta > 0$), para todo $\delta \neq 0$.*

Continuando con el análisis, corresponde ahora estudiar el caso cuando $\theta < 0$, es decir, $\beta > \frac{1+\delta}{2}$. En este caso no es necesario dividir los cálculos en función del signo de K, es decir, basta considerar $K \neq 0$. Ahora, recordando (2.15), y notando que en este caso $z^\theta \xrightarrow{z\to\infty} 0$, se tiene alguno de los siguientes casos, para $y \in [1,\infty)$

$$\exp\left\{\frac{-2K}{\theta}y^{\theta}\right\} \in \left[1, \exp\left\{\frac{-2K}{\theta}\right\}\right] \ , \ \exp\left\{\frac{2K}{\theta}y^{\theta}\right\} \in \left[\exp\left\{\frac{2K}{\theta}\right\}, 1\right] \ , \text{ si } K > 0,$$
$$\exp\left\{\frac{2K}{\theta}y^{\theta}\right\} \in \left[1, \exp\left\{\frac{2K}{\theta}\right\}\right] \ , \ \exp\left\{\frac{-2K}{\theta}y^{\theta}\right\} \in \left[\exp\left\{\frac{-2K}{\theta}\right\}, 1\right] \ , \text{ si } K < 0.$$

En cualquiera de estos casos, se tiene que

$$(2.15) \geq 2\exp\left\{\frac{2|K|}{\theta}\right\}\int_1^x\int_1^y z^{-2\beta}\mathrm{d}z\mathrm{d}y,$$

donde se acota la exponencial del término positivo por 1, mientras que la de exponente negativo se acota por su valor mínimo en el intervalo $[1,\infty)$. Con esto, se obtiene una desigualdad similar a (2.18), salvo por una constante positiva. Repitiendo entonces lo hecho en el caso anterior, se concluye que

$$2\exp\left\{\frac{2|K|}{\theta}\right\}\int_1^x\int_1^y z^{-2\beta}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \xrightarrow{x\to\infty} \infty,$$

para todos los valores de β, y así se obtiene el siguiente resultado

Proposición 2.4 *La única solución débil positiva (hasta un posible tiempo de explosión) de la ecuación diferencial estocástica*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma_t &= \sigma_t^{\beta}\mathrm{d}B_t + K\sigma_t^{\delta}\mathrm{d}t, \\ \sigma_0 &> 0, \end{aligned}$$

es siempre ***buena*** *cuando $\beta > \frac{1+\delta}{2}$ (es decir $\theta < 0$), para todo $\delta \neq 0$, $K \neq 0$.*

Finalmente, queda estudiar la situación cuando $\delta = 0$. En este caso, la ecuación (2.1) a estudiar se transforma en

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma_t &= \sigma_t^{\beta}\mathrm{d}B_t + K\mathrm{d}t, \\ \sigma_0 &> 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Se comienza por notar que en este caso

$$\frac{|b(x)|}{x^{2\beta}} = |K|x^{-2\beta} \in L^1_{loc}((0,\infty)) \quad \forall K \neq 0,$$

luego (2.18) tiene una única solución débil positiva, hasta un posible tiempo de explosión. Basta ver ahora cuando esta solución no explota hacia infinito casi seguramente. Para esto se procede, como antes, observando que

$$p'(x) = \exp\left\{-2\int_1^x \frac{b(\xi)}{\xi^{2\beta}}\mathrm{d}\xi\right\} = \exp\left\{-2K\int_1^x \xi^{-2\beta}\mathrm{d}\xi\right\}$$

$$= \begin{cases} \exp\left\{-2K\left(\frac{x^{1-2\beta}}{1-2\beta} - \frac{1}{1-2\beta}\right)\right\} & \text{si } \beta \neq \frac{1}{2}, \\ \\ \exp\left\{-2K\ln(x)\right\} = x^{-2K} & \text{si } \beta = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ahora, se comienza con el caso $\beta = 1/2$, en donde

$$
\begin{aligned}
(2.8) &= 2\int_1^x y^{-2K}\int_1^y z^{2K-1}\mathrm{d}z\mathrm{d}y = 2\int_1^x y^{-2K}\left(\frac{y^{2K}}{2K}-\frac{1}{2K}\right)\mathrm{d}y \qquad \text{(pues } K\neq 0\text{)}\\
&= \frac{1}{K}\int_1^x 1-y^{-2K}\mathrm{d}y = \begin{cases} \frac{1}{K}\left(x-1-\frac{x^{1-2K}}{1-2K}+\frac{1}{1-2K}\right) & \text{si } K\neq\frac{1}{2},\\ 2(x-1-\ln(x)) & \text{si } K=\frac{1}{2},\end{cases} \qquad (2.20)
\end{aligned}
$$

y se distinguen cuatro casos distintos

1. $K < 0$:

$$
(2.20) = \frac{x^{1-2K}}{-K}\left(\frac{-1}{x^{-2K}}+\frac{1}{x^{1-2K}}+\frac{1}{1-2K}-\frac{1}{(1-2K)x^{1-2K}}\right)\xrightarrow{x\to\infty}\infty,
$$

   ya que tanto $1-2K$ como $-K$ son positivos.

2. $K \in (0, 1/2)$:

$$
(2.20) = \frac{x}{K}\left(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{(1-2K)x^{2K}}+\frac{1}{(1-2K)x}\right)\xrightarrow{x\to\infty}\infty,
$$

   pues $1-2K$ y K son positivos.

3. $K = 1/2$:

$$
(2.20) = 2x\left(1-\frac{1}{x}-\frac{\ln(x)}{x}\right)\xrightarrow{x\to\infty}\infty.
$$

4. $K > 1/2$:

$$
(2.20) = \frac{x}{K}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{(2K-1)x^{2K}}-\frac{1}{(2K-1)x}\right)\xrightarrow{x\to\infty}\infty,
$$

   porque aquí tanto K como $2K-1$ son positivos.

y en todos ellos la solución que se encuentra es **buena**.

Para tratar el caso $\beta \neq 1/2$, se empieza por ver que

$$
\begin{aligned}
(2.8) &= 2\int_1^x \exp\left\{\frac{-2K}{1-2\beta}(y^{1-2\beta}-1)\right\}\int_1^y \exp\left\{\frac{2K}{1-2\beta}(z^{1-2\beta}-1)\right\}z^{-2\beta}\mathrm{d}z\mathrm{d}y\\
&= 2\int_1^x \exp\left\{\frac{-2K}{1-2\beta}y^{1-2\beta}\right\}\int_1^y \exp\left\{\frac{2K}{1-2\beta}z^{1-2\beta}\right\}z^{-2\beta}\mathrm{d}z\mathrm{d}y\\
&= 2\int_1^x \exp\left\{\frac{-2K}{1-2\beta}y^{1-2\beta}\right\}\frac{1}{2K}\left(\exp\left\{\frac{2K}{1-2\beta}y^{1-2\beta}\right\}-\exp\left\{\frac{2K}{1-2\beta}\right\}\right)\mathrm{d}y\\
&= \int_1^x \frac{1}{K}\left(1-\exp\left\{\frac{2K}{1-2\beta}\left(1-y^{1-2\beta}\right)\right\}\right)\mathrm{d}y = \int_1^x f(y)\mathrm{d}y, \qquad (2.21)
\end{aligned}
$$

, y luego nuevamente conviene dividir el análsis en cuatro partes

1. $K<0$, $\beta<1/2$: Se define

$$g(z)=\exp\left\{\frac{-2K}{1-2\beta}\left(y^{1-2\beta}-1\right)\right\},$$

y además, al notar que

$$f(y)=\frac{1}{-K}\left(\exp\left\{\frac{-2K}{1-2\beta}\left(y^{1-2\beta}-1\right)\right\}-1\right),$$

se tiene que

$$\frac{f(y)}{g(y)}=\frac{1}{-K}\left(1-\exp\left\{-\left(\frac{-2K}{1-2\beta}\left(y^{1-2\beta}-1\right)\right)\right\}\right)\xrightarrow{y\to\infty}\frac{1}{-K}\in(0,\infty),$$

con lo que, dado que ambas funciones son positivas, se puede aplicar el criterio del cuociente de convergencia de integrales para concluir que

$$v(\infty)=\int_1^\infty f(y)\mathrm{d}y\sim\int_1^\infty g(y)\mathrm{d}y\geq\int_1^\infty 1\mathrm{d}y=\infty.$$

2. $K<0$, $\beta>1/2$: Definiendo $g(z)\equiv 1$, se ve que ahora

$$\begin{aligned}\frac{f(y)}{g(y)}=f(y)&=\frac{1}{-K}\left(\exp\left\{\left(\frac{-2K}{2\beta-1}\left(1-\frac{1}{y^{2\beta-1}}\right)\right)\right\}-1\right)\\&\xrightarrow{y\to\infty}\frac{1}{-K}\left(\exp\left\{\frac{-2K}{2\beta-1}\right\}-1\right)\in(0,\infty),\end{aligned}$$

de donde, al igual que antes,

$$v(\infty)=\int_1^\infty f(y)\mathrm{d}y\sim\int_1^\infty g(y)\mathrm{d}y=\infty.$$

3. $K>0$, $\beta<1/2$: Se define de la misma forma $g(z)\equiv 1$, y sigue que

$$\frac{f(y)}{g(y)}=f(y)=\frac{1}{K}\left(1-\exp\left\{\left(\frac{2K}{1-2\beta}\left(1-y^{1-2\beta}\right)\right)\right\}\right)\xrightarrow{y\to\infty}\frac{1}{K}\in(0,\infty).$$

y se tiene la misma conclusión que en el caso anterior.

4. $K>0$, $\beta>1/2$: Se vuelve a definir $g(z)\equiv 1$ para obtener

$$\begin{aligned}\frac{f(y)}{g(y)}=f(y)&=\frac{1}{K}\left(1-\exp\left\{\frac{2K}{2\beta-1}\left(\frac{1}{y^{2\beta-1}}-1\right)\right\}\right)\\&\xrightarrow{y\to\infty}\frac{1}{K}\left(1-\exp\left\{\frac{-2K}{2\beta-1}\right\}\right)\in(0,\infty),\end{aligned}$$

y se concluye como antes que $v(\infty)=\infty$.

Este análsis demuestra la siguiente proposición que da fin a esta sección

Proposición 2.5 *La ecuación diferencial estocástica*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma_t &= \sigma_t^\beta \mathrm{d}B_t + K\mathrm{d}t, \\ \sigma_0 &> 0, \end{aligned}$$

tiene una única solución débil positiva (hasta un posible tiempo de explosión) para todo $K \neq 0$ y $\beta \in \mathbb{R}$. Más aún, esta solución es siempre ***buena****.*

A modo de resumen, se presentan todos los resultados en conjunto en el siguiente enunciado

Teorema 2.6 *La ecuación diferencial estocástica*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma_t &= \sigma_t^\beta \mathrm{d}B_t + K\sigma_t^\delta \mathrm{d}t, \\ \sigma_0 &> 0, \end{aligned}$$

tiene una solución débil positiva (hasta un posible tiempo de explosión) para todo $K \neq 0$, $\delta, \beta \in \mathbb{R}$. Esta solución es ***buena*** *si y solo si se cumple alguno de los siguientes casos no intersectantes:*

1. $\delta < 2\beta - 1$.
2. $\delta = 2\beta - 1$, $K \leq 1/2$.
3. $\delta = 2\beta - 1$, $K > 1/2$, $\beta \leq 1$.
4. $\delta > 2\beta - 1$, $K < 0$.
5. $\delta > 2\beta - 1$, $K > 0$, $\delta \leq 1$.

Vale la pena mencionar que este resultado integra las condiciones del caso $\delta = 0$ de buena forma, y que de ahora en adelante este no se trata como un caso particular distinto a $\delta \neq 0$.

Capítulo 3

Modelo de Volatilidad Estocástica

Ahora que se ha caracterizado el comportamiento de la ecuación de volatilidad para el caso de un drift de potencia, se puede proceder a estudiar el sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas que es el objeto central de este trabajo,

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = X_t \sigma_t^\alpha \mathrm{d}W_t \ , \quad X_0 = x_0 > 0, \\ \mathrm{d}\sigma_t = \sigma_t^\beta \mathrm{d}B_t + K\sigma_t^\delta \mathrm{d}t \ , \quad \sigma_0 > 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

donde W_t y B_t son movimientos brownianos ρ-correlacionados, y se impone que $\alpha > 0$, además de que β, δ y K cumplan alguna de las condiciones del teorema 2.6, para que la solución σ_t sea **buena**. Hay que notar que si T_0 es finito, luego σ_t se extiende continuamente por 0 para $t > T_0$ y la evolución de X_t solamente es de interés hasta el instante T_0, ya que luego de esto el proceso se mantiene constante. Esto implica entonces que el proceso crucial para este trabajo es $(X_{t\wedge T_0})_{t\geq 0}$.

Se prosigue entonces de la misma forma que en la sección 7 de [5]. Primero, se tiene que $X_{t\wedge T_0}$ es la martingala exponencial detenida en T_0 de σ_t^α; un proceso adaptado, positivo y medible que además satisface

$$\mathbb{P}\left[\int_0^T \sigma_t^{2\alpha} \mathrm{d}t < \infty\right] = 1 \ \forall T \in [0, \infty),$$

gracias a que σ_t es una solución **buena**, es decir $\mathbb{P}\left(T_\infty = \infty\right) = 1$. Por ende σ_t^α es continua en el intervalo $[0, T]$, para todo $T < \infty$, y la integral en cuestión es finita c.s.

Ahora, si se definen para $M, M' > 0$ los tiempos de parada

$$R_M = \text{ínf}\left\{t \geq 0 : X_{t\wedge T_0} \geq M\right\}, \tag{3.2}$$

$$\tau_M^{M'} = T_M \wedge R_{M'}, \tag{3.3}$$

se ve que, como X es la exponencial de un proceso, entonces para $\gamma \in (0, 1)$ fijo

$$X_{t\wedge T_0 \wedge \tau_M^{M'}} \geq 0 \Longrightarrow X^\gamma_{t\wedge T_0 \wedge \tau_M^{M'}} \geq 0 \Longrightarrow \mathbb{E}\left(X^\gamma_{t\wedge T_0\wedge \tau_M^{M'}}\right) \geq 0. \tag{3.4}$$

Con esto, se puede aplicar la regla de cálculo de Itô (ver [10], teorema 3.3.3) al proceso positivo $X^{\gamma}_{t\wedge T_0\wedge\tau_M^{M'}}$, considerando la función $f(x)=x^{\gamma}$ para obtener que

$$\begin{aligned}
X^{\gamma}_{t\wedge T_0\wedge\tau_M^{M'}} = f(X_{t\wedge T_0\wedge\tau_M^{M'}}) &= X^{\gamma}_{0\wedge T_0\wedge\tau_M^{M'}} + \int_0^{t\wedge T_0\wedge\tau_M^{M'}} f'(X_s)\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge T_0\wedge\tau_M^{M'}} f''(X_s)\mathrm{d}\langle X\rangle_s \\
&= x_0^{\gamma} + \int_0^{t\wedge T_0\wedge\tau_M^{M'}} \gamma X_s^{\gamma-1}X_s\sigma_s^{\alpha}\mathrm{d}W_s + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2}\int_0^{t\wedge T_0\wedge\tau_M^{M'}} X_s^{\gamma-2}X_s^2\sigma_s^{2\alpha}\mathrm{d}s \\
&= x_0^{\gamma} + \int_0^{t\wedge T_0\wedge\tau_M^{M'}} \gamma X_s^{\gamma}\sigma_s^{\alpha}\mathrm{d}W_s + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2}\int_0^{t\wedge T_0\wedge\tau_M^{M'}} X_s^{\gamma}\sigma_s^{2\alpha}\mathrm{d}s, \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

donde el segundo término de la suma es una martingala local detenida, siendo la integral estocástica con respecto a un movimiento browniano de un proceso bien definido. Esto implica que su esperanza es 0. Tomando entonces $\mathbb{E}(\cdot)$ en (3.5) y considerando (3.4), resulta

$$0 \leq \mathbb{E}\left(X^{\gamma}_{t\wedge T_0\wedge\tau_M^{M'}}\right) = x_0^{\gamma} + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2}\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_0\wedge\tau_M^{M'}} X_s^{\gamma}\sigma_s^{2\alpha}\mathrm{d}s\right). \qquad (3.6)$$

Por otro lado, para $M>0$ y $t>0$ fijos, se tiene que

$$\begin{aligned}
M\mathbb{P}(R_M\leq t) &= M\mathbb{P}(R_M\leq t, R_M\leq T_0) + M\mathbb{P}(R_M\leq t, R_M> T_0) \\
&= M\mathbb{P}(R_M\leq t, R_M\leq T_0) + 0,
\end{aligned}$$

debido a que es claro que si $X_{t\wedge T_0}$ no alcanza el nivel M antes de T_0, luego no lo alcanza nunca. Por ende en este caso, R_M es infinito, y en particular mayor a un t fijo.

Con esto, se prosigue a calcular

$$\begin{aligned}
M\mathbb{P}(R_M\leq t) &= M\mathbb{P}(R_M\leq t, R_M\leq T_0) = M\mathbb{E}(1_{R_M\leq t\wedge T_0}) = \mathbb{E}(M1_{R_M\leq t\wedge T_0}) \\
&= \mathbb{E}(X_{R_M}1_{R_M\leq t\wedge T_0}) = \mathbb{E}(X_{R_M\wedge t\wedge T_0}1_{R_M\leq t\wedge T_0}) \leq \mathbb{E}(X_{t\wedge T_0\wedge R_M}), \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

y, como X_t es una martingala exponencial, entonces en particular es una martingala local, y más aún, gracias a que es positiva, es una supermartingala. Esto implica que, si se detiene $X_{t\wedge T_0}$ en R_M, se obtiene una martingala local acotada y por ende, una martingala. En particular se tiene que

$$\mathbb{E}(X_{t\wedge T_0\wedge R_M}) = \mathbb{E}(X_{0\wedge T_0\wedge R_M}) = x_0. \qquad (3.8)$$

Así, al combinar (3.7) y (3.8), se concluye que para todo $t\geq 0$

$$\mathbb{P}(R_M\leq t) \leq \frac{x_0}{M} \xrightarrow{M\to\infty} 0,$$

de donde se concluye que $R_M\to\infty$ c.s. cuando $M\to\infty$. Este último resultado, junto con que se trabaja con σ_t **buena**, entrega que

$$\tau_M^{M'} \xrightarrow{M,\, M'\to\infty} \infty \text{ c.s. }, \qquad (3.9)$$

independiente de cual límite se considere primero. De ahora en adelante se adopta la notación $\tau = \tau_M^{M'}$ para evitar recargar las expresiones con índices.

Con todo esto se puede enunciar el primer resultado de esta sección

Proposición 3.1 (ver [5], Proposición 1) *Sean X_t y σ_t las soluciones del sistema (3.1), donde σ_t es* ***buena****. Entonces, para todo $\gamma \in (0,1)$ y para todo $t \geq 0$, se tiene que*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_0} X_s^\gamma \sigma_s^{2\alpha} \mathrm{d}s\right) < \infty,$$

y además el siguiente límite existe

$$L(t) = \lim_{\gamma\uparrow 1} \frac{\gamma - 1}{2}\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_0} X_s^\gamma \sigma_s^{2\alpha} \mathrm{d}s\right), \tag{3.10}$$

donde $L(t) \in (-x_0, 0]$, y está caracterizado por la expresión

$$L(t) = \mathbb{E}(X_{t\wedge T_0}) - x_0.$$

Demostración. De (3.6), y considerando que $\gamma \in (0,1)$, se recupera que

$$\frac{\gamma(1-\gamma)}{2}\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_0 \wedge \tau} X_s^\gamma \sigma_s^{2\alpha} \mathrm{d}s\right) \leq x_0^\gamma,$$

de donde

$$\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_0 \wedge \tau} X_s^\gamma \sigma_s^{2\alpha} \mathrm{d}s\right) \leq \frac{2x_0^\gamma}{\gamma(1-\gamma)},$$

entonces, como X_t y σ_t son positivos, y recordando (3.9), se puede tomar el límite cuando M y M' van a infinito en la desigualdad anterior y, gracias al teorema de convergencia monótona (ver [15], teorema 3.1.1) se llega a que

$$\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_0} X_s^\gamma \sigma_s^{2\alpha} \mathrm{d}s\right) \leq \frac{2x_0^\gamma}{\gamma(1-\gamma)} < \infty, \tag{3.11}$$

lo que prueba la primera aseveración.

Por otra parte, se define $p = \frac{1}{\gamma}$ y $q = \frac{1}{1-\gamma}$, que cumplen $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \gamma + 1 - \gamma = 1$ y además $p,q > 1$. Así, se puede aplicar la desigualdad de Hölder (ver [15], proposición 3.4.9) para deducir que

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathbb{E}\left(X_{\tau\wedge t\wedge T_0}^\gamma 1_{\tau < t\wedge T_0}\right) &\leq \mathbb{E}((X_{\tau\wedge t\wedge T_0}^\gamma)^p)^{\frac{1}{p}} \mathbb{E}((1_{\tau<t\wedge T_0})^q)^{\frac{1}{q}} = \mathbb{E}(X_{\tau\wedge t\wedge T_0})^\gamma \mathbb{E}(1_{\tau<t\wedge T_0})^{1-\gamma} \\ &= \mathbb{E}(X_{\tau\wedge t\wedge T_0})^\gamma \mathbb{P}(\tau < t\wedge T_0)^{1-\gamma} \leq x_0^\gamma \mathbb{P}(\tau < t)^{1-\gamma} \xrightarrow{M,\, M'\to\infty} 0, \end{aligned} \tag{3.12}$$

donde esto último se tiene gracias a (3.9).

Finalmente, gracias a la positividad de X_t, se puede ver que

$$X^{\gamma}_{t\wedge T_0} 1_{\tau\geq t\wedge T_0} \leq X^{\gamma}_{t\wedge T_0} \leq X_{t\wedge T_0} + 1, \tag{3.13}$$

pues $\gamma \in (0,1)$, y se sabe que $(X_{t\wedge T_0} + 1) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, debido a que, gracias al lema de Fatou (ver [15], lema 3.2.1),

$$\mathbb{E}(X_{t\wedge T_0}) = \mathbb{E}(\liminf_{M,M'\to\infty} X_{t\wedge T_0\wedge\tau}) \leq \liminf_{M,M'\to\infty} \mathbb{E}(X_{t\wedge T_0\wedge\tau}) = x_0 < \infty.$$

Con esto, se puede aplicar el teorema de convergencia dominada (ver [15], teorema 3.3.1) junto con (3.12) para llegar a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^{\gamma}_{\tau\wedge t\wedge T_0}) &= \mathbb{E}(X^{\gamma}_{\tau\wedge t\wedge T_0} 1_{\tau\geq t\wedge T_0}) + \mathbb{E}(X^{\gamma}_{\tau\wedge t\wedge T_0} 1_{\tau< t\wedge T_0}) \\ &\xrightarrow{M,\, M'\to\infty} \mathbb{E}(X^{\gamma}_{t\wedge T_0\wedge\infty} 1_{\infty\geq t\wedge T_0}) = \mathbb{E}(X^{\gamma}_{t\wedge T_0}).\end{aligned}$$

Dado este resultado, se puede tomar el mismo límite en (3.6) y, junto con (3.11) se consigue la siguiente igualdad

$$\mathbb{E}(X^{\gamma}_{t\wedge T_0}) = x_0^{\gamma} + \frac{\gamma(1-\gamma)}{2}\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_0} X_s^{\gamma}\sigma_s^{2\alpha}\mathrm{d}s\right),$$

de donde, gracias nuevamente al teorema de convergencia dominada, tomando el límite cuando γ crece a 1

$$\mathbb{E}(X_{t\wedge T_0}) - x_0 = \lim_{\gamma\uparrow 1}\frac{\gamma(1-\gamma)}{2}\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_0} X_s^{\gamma}\sigma_s^{2\alpha}\mathrm{d}s\right),$$

de donde se concluye que $L(t)$ existe, y además satisface la igualdad buscada.

□

Observación Es importante recordar que la motivación principal de este trabajo es identificar para qué valores de los parámetros del sistema (3.1), su solución en el intervalo de interés $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala local estricta o una martingala real. Esto se traduce, gracias a la proposición anterior, en identificar en qué casos existe un $t > 0$ tal que $L(t) < 0$. Si tal t existe, se tiene que

$$\mathbb{E}(X_{t\wedge T_0}) < x_0 = \mathbb{E}(X_{0\wedge T_0}),$$

lo que basta para concluir que $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala local estricta; mientras que si no existe dicho t, se concluye que

$$\mathbb{E}(X_{t\wedge T_0}) = x_0 = \mathbb{E}(X_{0\wedge T_0})\ ,\ \forall t \geq 0,$$

lo que, gracias a que X_t es supermartingala, es suficiente para aseverar que $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala real.

El siguiente lema técnico también viene de [5], aunque se agrega un caso límite no considerado. Este no es usado en las demostraciones que requieren el lema, pero se agrega por completitud.

Lema 3.2 *Sea* $0 \leq \theta_1 < \theta_2$ *y sean* X_t *y* σ_t *las soluciones del sistema (3.1), donde* σ_t *es* ***buena****. Si para* $t > 0$ *sucede que*

$$\liminf_{\gamma \uparrow 1} (\gamma - 1)\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_0} X_s^\gamma \sigma_s^{\theta_1} \mathrm{d}s\right) < 0,$$

luego, se tiene que

$$\liminf_{\gamma \uparrow 1} (\gamma - 1)\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_0} X_s^\gamma \sigma_s^{\theta_2} \mathrm{d}s\right) = -\infty.$$

Demostración. La demostración procede viendo el caso $\theta_1 = 0$ igual que el caso $\theta_1 > 0$. Sea $A > 0$ y $\gamma \in (0, 1)$; luego

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_0} X_s^\gamma \sigma_s^{\theta_2} \mathrm{d}s\right) &= \mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_0} X_s^\gamma \sigma_s^{\theta_2} 1_{\sigma_s > A} \mathrm{d}s\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_0} X_s^\gamma \sigma_s^{\theta_2} 1_{\sigma_s \leq A} \mathrm{d}s\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_0} X_s^\gamma \sigma_s^{\theta_2 - \theta_1} \sigma_s^{\theta_1} 1_{\sigma_s > A} \mathrm{d}s\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_0} X_s^\gamma \sigma_s^{\theta_2} 1_{\sigma_s \leq A} \mathrm{d}s\right) \\
&\geq A^{\theta_2 - \theta_1} \mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_0} X_s^\gamma \sigma_s^{\theta_1} 1_{\sigma_s > A} \mathrm{d}s\right), \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad viene gracias al uso de la indicatriz en un caso, y a la positividad de tanto X_t como σ_t en el otro. Ahora, la indicatriz se puede reescribir para obtener que

$$\begin{aligned}
(3.14) &= A^{\theta_2 - \theta_1}\left[\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_0} X_s^\gamma \sigma_s^{\theta_1} \mathrm{d}s\right) - \mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_0} X_s^\gamma \sigma_s^{\theta_1} 1_{\sigma_s \leq A} \mathrm{d}s\right)\right] \\
&\geq A^{\theta_2 - \theta_1} \mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_0} X_s^\gamma \sigma_s^{\theta_1} \mathrm{d}s\right) - A^{\theta_2} \mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_0} X_s^\gamma 1_{\sigma_s \leq A} \mathrm{d}s\right) \\
&\geq A^{\theta_2 - \theta_1} \mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_0} X_s^\gamma \sigma_s^{\theta_1} \mathrm{d}s\right) - A^{\theta_2} \mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_0} X_s^\gamma \mathrm{d}s\right) \\
&\geq A^{\theta_2 - \theta_1} \mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_0} X_s^\gamma \sigma_s^{\theta_1} \mathrm{d}s\right) - A^{\theta_2} \mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_0} X_s + 1 \mathrm{d}s\right), \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se usa (3.13).

Ahora se puede aplicar el teorema de Tonelli (ver [15], Teorema 6.2.1), gracias a la positividad de X_t, y además usar el hecho que $\mathbb{E}(X_{t\wedge T_0}) \leq x_0$ para concluir que

$$(3.15) \geq A^{\theta_2 - \theta_1} \mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_0} X_s^\gamma \sigma_s^{\theta_1} \mathrm{d}s\right) - A^{\theta_2} t(x_0 + 1),$$

de donde se llega a que

$$(\gamma-1)\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_0} X_s^\gamma \sigma_s^{\theta_2}\mathrm{d}s\right) \le (\gamma-1)A^{\theta_2-\theta_1}\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_0} X_s^\gamma \sigma_s^{\theta_1}\mathrm{d}s\right) - (\gamma-1)A^{\theta_2}t(x_0+1),$$

y, tomando el límite inferior cuando γ crece a 1, se obtiene que

$$\liminf_{\gamma\uparrow 1}(\gamma-1)\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_0} X_s^\gamma \sigma_s^{\theta_2}\mathrm{d}s\right) \le A^{\theta_2-\theta_1}\liminf_{\gamma\uparrow 1}(\gamma-1)\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_0} X_s^\gamma \sigma_s^{\theta_1}\mathrm{d}s\right) < 0.$$

Finalmente, como $\theta_2 > \theta_1$ y A fue elegido arbitrariamente, se puede tomar el límite cuando A crece a infinito para llegar a lo buscado.

□

Con el lema anterior se puede proceder a enunciar el primer resultado importante que concierne al comportamiento de martingala del proceso $X_{t\wedge T_0}$ de (3.1), que también viene de [5], pero se extiende al caso general presentado en este trabajo

Teorema 3.3 *Si se considera el sistema*

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = X_t\sigma_t^\alpha \mathrm{d}W_t\ , \quad X_0 = x_0 > 0, \\ \mathrm{d}\sigma_t = \sigma_t^\beta \mathrm{d}B_t + K\sigma_t^\delta \mathrm{d}t\ , \quad \sigma_0 > 0, \end{cases}$$

donde $\alpha > 0$, $\beta, \delta \in \mathbb{R}$, $K < 0$ y $\rho \le 0$. Entonces $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala.

Demostración. Lo primero que hay que notar, recordando el teorema 2.6, es que como $K < 0$, entonces la solución σ_t del sistema (3.1) es siempre **buena**. Por esto no es necesario agregar esta condición como hipótesis.

Ahora bien, para $\gamma \in (0,1)$ y similar a lo que se hizo en (3.5), se quiere aplicar la regla de cálculo de Itô multivariada (ver [10], teorema 3.3.6) al proceso $X^\gamma_{t\wedge T_0\wedge\tau}\sigma_{t\wedge T_0\wedge\tau}$, donde $f(x,y) = x^\gamma y$. Sin embargo, para efecto de los cálculos, es conveniente considerar los tiempos de parada

$$T_\varepsilon = \inf\{t \ge 0 : \sigma_t \le \varepsilon\},$$

que cumplen que, por continuidad de σ_t,

$$T_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} T_0.$$

Aplicando el teorema ahora a $X^\gamma_{t\wedge T_\varepsilon\wedge\tau}\sigma_{t\wedge T_\varepsilon\wedge\tau}$, se obtiene que

$$\begin{aligned}
X^\gamma_{t\wedge T_\varepsilon\wedge\tau}\sigma_{t\wedge T_\varepsilon\wedge\tau} = f(X_{t\wedge T_\varepsilon\wedge\tau},\sigma_{t\wedge T_\varepsilon\wedge\tau}) &= X^\gamma_{0\wedge T_\varepsilon\wedge\tau}\sigma_{0\wedge T_\varepsilon\wedge\tau} + \int_0^{t\wedge T_\varepsilon\wedge\tau}(\partial_x f)(X_s,\sigma_s)\mathrm{d}X_s \\
&+ \int_0^{t\wedge T_\varepsilon\wedge\tau}(\partial_y f)(X_s,\sigma_s)\mathrm{d}\sigma_s + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge T_\varepsilon\wedge\tau}(\partial^2_{xx} f)(X_s,\sigma_s)\mathrm{d}\langle X\rangle_s \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge T_\varepsilon\wedge\tau}(\partial^2_{y} f)(X_s,\sigma_s)\mathrm{d}\langle \sigma\rangle_s + \int_0^{t\wedge T_\varepsilon\wedge\tau}(\partial_{xy} f)(X_s,\sigma_s)\mathrm{d}\langle X,\sigma\rangle_s, \quad (3.16)
\end{aligned}$$

de donde, usando las relaciones presentes en el sistema de ecuaciones y dado que f es conocida, se deduce que

$$\begin{aligned}
(3.16) = \; & x_0^\gamma\sigma_0 + \gamma\int_0^{t\wedge T_\varepsilon\wedge\tau} X_s^{\gamma-1}\sigma_s X_s\sigma_s^\alpha \mathrm{d}W_s + \int_0^{t\wedge T_\varepsilon\wedge\tau} X_s^\gamma\sigma_s^\beta\mathrm{d}B_s + K\int_0^{t\wedge T_\varepsilon\wedge\tau} X_s^\gamma\sigma_s^\delta\mathrm{d}s \\
&+ \frac{\gamma(\gamma-1)}{2}\int_0^{t\wedge T_\varepsilon\wedge\tau} X_s^{\gamma-2}\sigma_s X_s^2\sigma_s^{2\alpha}\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge T_\varepsilon\wedge\tau} 0\cdot\sigma_s^{2\beta}\mathrm{d}s \\
&+ \gamma\int_0^{t\wedge T_\varepsilon\wedge\tau} X_s^{\gamma-1}X_s\sigma_s^\alpha\sigma_s^\beta\rho\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Reduciendo los términos, se concluye que

$$\begin{aligned}
X^\gamma_{t\wedge T_\varepsilon\wedge\tau}\sigma_{t\wedge T_\varepsilon\wedge\tau} &= x_0^\gamma\sigma_0 + \gamma\int_0^{t\wedge T_\varepsilon\wedge\tau} X_s^\gamma\sigma_s^{\alpha+1}\mathrm{d}W_s + \int_0^{t\wedge T_\varepsilon\wedge\tau} X_s^\gamma\sigma_s^\beta\mathrm{d}B_s + K\int_0^{t\wedge T_\varepsilon\wedge\tau} X_s^\gamma\sigma_s^\delta\mathrm{d}s \\
&+ \frac{\gamma(\gamma-1)}{2}\int_0^{t\wedge T_\varepsilon\wedge\tau} X_s^\gamma\sigma_s^{2\alpha+1}\mathrm{d}s + \gamma\rho\int_0^{t\wedge T_\varepsilon\wedge\tau} X_s^\gamma\sigma_s^{\alpha+\beta}\mathrm{d}s. \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

Cabe mencionar que los cálculos anteriores son hechos considerando los procesos detenidos al momento de que σ_t cruce la barrera inferior ε. Esta acotación evita problemas de integración en (3.17), en los casos en que $\beta,\delta,\alpha+\beta<0$.

Ahora, ya que tanto σ_s como X_s son procesos positivos, y notando que las integrales con respecto a los movimientos brownianos involucrados son martingalas locales detenidas, se tiene que

$$\begin{aligned}
0 \leq \mathbb{E}(X^\gamma_{t\wedge T_\varepsilon\wedge\tau}\sigma_{t\wedge T_\varepsilon\wedge\tau}) &= x_0^\gamma\sigma_0 + K\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_\varepsilon\wedge\tau} X_s^\gamma\sigma_s^\delta\mathrm{d}s\right) \\
&+ \frac{\gamma(\gamma-1)}{2}\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_\varepsilon\wedge\tau} X_s^\gamma\sigma_s^{2\alpha+1}\mathrm{d}s\right) + \gamma\rho\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_\varepsilon\wedge\tau} X_s^\gamma\sigma_s^{\alpha+\beta}\mathrm{d}s\right) \\
&\leq x_0^\gamma\sigma_0 + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2}\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_\varepsilon\wedge\tau} X_s^\gamma\sigma_s^{2\alpha+1}\mathrm{d}s\right), \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad es debido a la positividad de los términos dentro de la esperanza junto con los signos de ρ y K. Reordenando, se obtiene que

$$(1-\gamma)\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_\varepsilon\wedge\tau} X_s^\gamma\sigma_s^{2\alpha+1}\mathrm{d}s\right) \leq \frac{2x_0^\gamma\sigma_0}{\gamma}.$$

Nuevamente gracias a la positividad de los procesos se puede usar el teorema de convergencia monótona, tanto en M, M' y ε, para concluir que

$$(1-\gamma)\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_0} X_s^\gamma \sigma_s^{2\alpha+1}\mathrm{d}s\right) \leq \frac{2x_0^\gamma \sigma_0}{\gamma},$$

o, lo que es lo mismo,

$$(\gamma-1)\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_0} X_s^\gamma \sigma_s^{2\alpha+1}\mathrm{d}s\right) \geq \frac{-2x_0^\gamma \sigma_0}{\gamma},$$

de donde, como esta última desigualdad se tiene para todo $\gamma \in (0,1)$, tomando $\liminf_{\gamma\uparrow 1}$, se llega a que

$$\liminf_{\gamma\uparrow 1}(\gamma-1)\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_0} X_s^\gamma \sigma_s^{2\alpha+1}\mathrm{d}s\right) \geq -2x_0\sigma_0 > -\infty,$$

y esta igualdad es válida para todo tiempo t. Así, se puede usar el lema 3.2, ya que $0 < 2\alpha < 2\alpha+1$, para concluir que para todo tiempo t

$$\lim_{\gamma\uparrow 1}(\gamma-1)\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_0} X_s^\gamma \sigma_s^{2\alpha}\mathrm{d}s\right) = 0,$$

lo que equivale, gracias a la proposición 3.1, a que $\mathbb{E}(X_{t\wedge T_0}) = x_0$ para todo tiempo, y $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala.

$\square$

Observación En el caso en que $\delta = 0$, esta demostración se puede adaptar para abarcar también el caso $K > 0$. Basta notar que, en (3.18) se puede usar que

$$K\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_\varepsilon\wedge\tau} X_s^\gamma \mathrm{d}s\right) \leq Kt(x_0+1),$$

gracias a una aplicación del teorema de Tonelli junto con la desigualdad (3.13) y el hecho de que $\mathbb{E}(X_{t\wedge T_0}) \leq x_0$. Siguiendo entonces los mismos pasos de la demostración anterior se obtiene que

$$\liminf_{\gamma\uparrow 1}(\gamma-1)\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge T_0} X_s^\gamma \sigma_s^{2\alpha+1}\mathrm{d}s\right) \geq -2x_0\sigma_0 - 2Kt(x_0+1) > -\infty,$$

y se llega a la misma conclusión de que $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala. Más adelante se presenta una demostración alternativa para este caso.

El teorema anterior responde la pregunta esencial de este trabajo de manera general para algunos casos interesantes. Sin embargo, todavía es necesario abordar una variedad de casos distintos que quedan fuera del análisis realizado.

Para esto, se comienza por elegir parámetros para la ecuación (3.1) tales que la solución σ_t resulte ser **buena** (ver teorema 2.6) y al mismo tiempo que no hayan quedado caraterizados por el teorema 3.3, es decir, $K > 0$ ó $\rho > 0$. Después, se realiza el siguiente cambio de variable

$$y_t = \sigma_t^\alpha, \tag{3.19}$$

y así, X_t ahora se rige por la ecuación

$$\mathrm{d}X_t = y_t X_t \mathrm{d}W_t \ , \ X_0 = x_0 > 0. \tag{3.20}$$

Por otra parte, se puede aplicar nuevamente la regla de cálculo de Itô usando la función $f(x) = x^\alpha$ para concluir que y_t cumple la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} y_t = f(\sigma_t) &= f(\sigma_0) + \int_0^t f'(\sigma_s)\mathrm{d}\sigma_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(\sigma_s)\mathrm{d}\langle\sigma\rangle_s \\ &= \sigma_0^\alpha + \alpha\int_0^t \sigma_s^{\alpha-1}\mathrm{d}\sigma_s + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\int_0^t \sigma_s^{\alpha-2}\mathrm{d}\langle\sigma\rangle_s \\ &= \sigma_0^\alpha + \alpha\int_0^t \sigma_s^{\alpha+\beta-1}\mathrm{d}B_s + \alpha K\int_0^t \sigma_s^{\alpha+\delta-1}\mathrm{d}s + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\int_0^t \sigma_s^{2\beta+\alpha-2}\mathrm{d}s \\ &= \sigma_0^\alpha + \alpha\int_0^t y_s^{1+\frac{\beta-1}{\alpha}}\mathrm{d}B_s + \alpha K\int_0^t y_s^{1+\frac{\delta-1}{\alpha}}\mathrm{d}s + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\int_0^t y_s^{1+2\frac{\beta-1}{\alpha}}\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{3.21}$$

donde nuevamente si se considera el caso donde $T_0 < \infty$, estas igualdades se entienden solamente para $t < T_0$, mientras que para $t \geq T_0$, y_t se extiende continuamente por 0. Uniendo (3.20) y (3.21), se obtiene que X_t e y_t solucionan, dentro del intervalo de interés, el siguiente sistema

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = X_t y_t \mathrm{d}W_t \ , \quad X_0 = x_0 > 0, \\ \mathrm{d}y_t = \alpha y_t^{1+\frac{\beta-1}{\alpha}}\mathrm{d}B_t + \left\{K\alpha y_t^{1+\frac{\delta-1}{\alpha}} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} y_t^{1+2\frac{\beta-1}{\alpha}}\right\}\mathrm{d}t \ , \quad y_0 = \sigma_0^\alpha > 0. \end{cases} \tag{3.22}$$

Gracias a que $\alpha > 0$ y recordando (2.3) y (2.5), se cumplen directamente las siguientes relaciones

$$\begin{gathered} T_\infty^y = \lim_{M\to\infty} T_M^y = \lim_{M\to\infty} \inf\{t \geq 0 : y_t \geq M\} = T_\infty^\sigma = T_\infty, \\ T_0^y = \inf\{t \geq 0 : y_t = 0\} = T_0^\sigma = T_0, \end{gathered} \tag{3.23}$$

de donde se infiere que, como se considera una solución **buena** de σ_t, o lo que es lo mismo $T_\infty = \infty$ c.s, entonces $T_\infty^y = \infty$ c.s. Es importante mencionar que aunque las relaciones anteriores son ciertas, también se tiene

$$T_M = T_M^\sigma \neq \inf\{t \geq 0 : y_t \geq M\} = T_M^y.$$

La relación correcta entre T_M^σ y T_M^y viene dada por

$$T_M^\sigma = T_{M^\alpha}^y,$$

debido a la relación (3.19) y, como α es positivo, se recupera así (3.23).

Además, gracias a las ecuaciones (3.22), se sigue que $X_{t\wedge T_0}$ es la martingala exponencial detenida del proceso y_t. Es decir, en particular cumple, para todo $t \geq 0$ fijo

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{T_M^y \wedge T_0} 1_{T_M^y < t \wedge T_0}) &= \mathbb{E}\left(x_0 \exp\left\{ \int_0^{T_M^y \wedge T_0} y_s \mathrm{d}W_s - \frac{1}{2} \int_0^{T_M^y \wedge T_0} y_s^2 \mathrm{d}s \right\} 1_{T_M^y < t \wedge T_0} \right) \\
&= \mathbb{E}\left(x_0 \exp\left\{ \int_0^{T_M^y \wedge t \wedge T_0} y_s \mathrm{d}W_s - \frac{1}{2} \int_0^{T_M^y \wedge t \wedge T_0} y_s^2 \mathrm{d}s \right\} 1_{T_M^y < t \wedge T_0} \right) \\
&= x_0 \tilde{\mathbb{E}}_t(1_{T_M^y < t \wedge T_0}) = x_0 \tilde{\mathbb{P}}_t(T_M^y < t \wedge T_0), \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

donde $\tilde{\mathbb{P}}_t$ es la medida que tiene como densidad con respecto a $\mathbb{P}$ a la función

$$
\exp\left\{ \int_0^{T_M^y \wedge t \wedge T_0} y_s \mathrm{d}W_s - \frac{1}{2} \int_0^{T_M^y \wedge t \wedge T_0} y_s^2 \mathrm{d}s \right\}, \qquad (3.25)
$$

y $\tilde{\mathbb{E}}_t$ es la esperanza con respecto a la medida $\tilde{\mathbb{P}}_t$. Es importante notar que, como se tiene que para todo $0 \leq T < \infty$

$$
\mathbb{E}\left(\exp\left\{ \frac{1}{2} \int_0^{T \wedge T_M^y \wedge T_0} y_s^2 \mathrm{d}s \right\} \right) \leq \exp\left\{ \frac{1}{2} M^2 T \right\} < \infty,
$$

luego (3.25) satisface la condición de Novikov (ver proposición 1.3) y por ende (3.25) es una martingala. Esto se traduce en que

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{P}}_t(\Omega) &= \mathbb{E}\left(\exp\left\{ \int_0^{T_M^y \wedge t \wedge T_0} y_s \mathrm{d}W_s - \frac{1}{2} \int_0^{T_M^y \wedge t \wedge T_0} y_s^2 \mathrm{d}s \right\} \right) \\
&= \mathbb{E}\left(\exp\left\{ \int_0^{T_M^y \wedge 0 \wedge T_0} y_s \mathrm{d}W_s - \frac{1}{2} \int_0^{T_M^y \wedge 0 \wedge T_0} y_s^2 \mathrm{d}s \right\} \right) = 1,
\end{aligned}
$$

y así, $\tilde{\mathbb{P}}_t$ es una medida de probabilidad.

Por otra parte como B_s es un movimiento browniano con respecto a $\mathbb{P}$, es también en particular una martingala continua para $\mathbb{P}$. Luego, como (3.25) es una martingala, se puede aplicar un corolario del teorema de Girsanov (ver proposición 1.2) para concluir que

$$
\begin{aligned}
\tilde{B}_s &= B_s - \int_0^s y_r \mathrm{d}\langle W, B\rangle_r \ , \ 0 \leq s < t \wedge T_M^y \wedge T_0 \\
&= B_s - \rho \int_0^s y_r \mathrm{d}r \ , \ 0 \leq s < t \wedge T_M^y \wedge T_0, \qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

es una martingala continua con respecto a $\tilde{\mathbb{P}}_t$. Más aún, cumple que

$$
\langle \tilde{B} \rangle_s = \langle B \rangle_s = s,
$$

y por ende, $\tilde{B}_s$ es un movimiento browniano con respecto a $\tilde{\mathbb{P}}_t$. Ahora, se puede incluir la igualdad (3.26) en la ecuación (3.22) para y_s y se obtiene la siguiente ecuación

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}y_s &= \alpha y_s^{1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \mathrm{d}B_s + \left\{ K\alpha y_s^{1+\frac{\delta-1}{\alpha}} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} y_s^{1+2\frac{\beta-1}{\alpha}} \right\} \mathrm{d}s \\
&= \alpha y_s^{1+\frac{\beta-1}{\alpha}} (\mathrm{d}\tilde{B}_s + \rho y_s \mathrm{d}s) + \left\{ K\alpha y_s^{1+\frac{\delta-1}{\alpha}} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} y_s^{1+2\frac{\beta-1}{\alpha}} \right\} \mathrm{d}s \\
&= \alpha y_s^{1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \mathrm{d}\tilde{B}_s + \left\{ K\alpha y_s^{1+\frac{\delta-1}{\alpha}} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} y_s^{1+2\frac{\beta-1}{\alpha}} + \alpha\rho y_s^{2+\frac{\beta-1}{\alpha}} \right\} \mathrm{d}s. \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

La igualdad (3.26) entrega entonces que la solución $(y_{s\wedge t\wedge T_M^y\wedge T_0},\, T_M^y \wedge t \wedge T_0)$ de (3.22) bajo la medida $\tilde{\mathbb{P}}_t$ tiene la misma distribución que la solución $(\tilde{y}_{s\wedge t\wedge T_M^{\tilde{y}}\wedge T_0^{\tilde{y}}},\, T_M^{\tilde{y}} \wedge t \wedge T_0^{\tilde{y}})$ de (3.27) bajo la medida $\mathbb{P}$ cuando ambas comienzan de la misma condición inicial σ_0^α; donde se abusa de la notación para definir

$$
\begin{aligned}
T_M^{\tilde{y}} &= \text{ínf}\left\{ s \geq 0 : \tilde{y}_s \geq M \right\} \\
T_0^{\tilde{y}} &= \text{ínf}\left\{ s \geq 0 : \tilde{y}_s = 0 \right\}.
\end{aligned}
$$

En particular, se tiene la siguiente igualdad para todo $t > 0$ y para todo $M > 0$

$$
\tilde{\mathbb{P}}_t(T_M^y < t \wedge T_0) = \mathbb{P}(T_M^{\tilde{y}} < t \wedge T_0^{\tilde{y}}). \qquad (3.28)
$$

Por otro lado, gracias a que (3.25) verifica la condición de Novikov, entonces $X_{t\wedge T_M^y\wedge T_0}$ es una martingala para todo $M > 0$. Esto permite concluir que

$$
x_0 = \mathbb{E}(X_{0\wedge T_0\wedge T_M^y}) = \mathbb{E}(X_{t\wedge T_0\wedge T_M^y}) = \mathbb{E}(X_{t\wedge T_0} 1_{t\wedge T_0 \leq T_M^y}) + \mathbb{E}(X_{T_M^y\wedge T_0} 1_{T_M^y < t\wedge T_0}), \qquad (3.29)
$$

donde además se tiene que por teorema de convergencia monótona

$$
\lim_{M\to\infty} \mathbb{E}(X_{t\wedge T_0} 1_{t\wedge T_0 \leq T_M^y}) = \mathbb{E}(X_{t\wedge T_0} 1_{t\wedge T_0 \leq \infty}) = \mathbb{E}(X_{t\wedge T_0}),
$$

debido a la positividad de $X_{t\wedge T_0}$ y a que $T_M^y \xrightarrow{M\to\infty} \infty$ c.s. Así, tomando el límite inferior cuando M crece a infinito en (3.29), se llega a que para todo $t > 0$

$$
x_0 = \mathbb{E}(X_{t\wedge T_0}) + \liminf_{M\to\infty} \mathbb{E}(X_{T_M^y\wedge T_0} 1_{T_M^y < t\wedge T_0}).
$$

Esta igualdad entrega una segunda caracterización para cuando el proceso $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala. Si para todo $t > 0$ se cumple que

$$
\liminf_{M\to\infty} \mathbb{E}(X_{T_M^y\wedge T_0} 1_{T_M^y < t\wedge T_0}) = 0,
$$

entonces se tiene que para todo $t > 0$

$$
x_0 = \mathbb{E}(X_{t\wedge T_0}),
$$

lo que equivale a que $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala, recordando la proposición 3.1. Por el contrario, si existe $t_0 > 0$ tal que

$$\liminf_{M\to\infty} \mathbb{E}(X_{T_M^y\wedge T_0} 1_{T_M^y < t_0\wedge T_0}) > 0,$$

luego para dicho t_0 se cumple que

$$x_0 = \mathbb{E}(X_{t_0\wedge T_0}) + \liminf_{M\to\infty} \mathbb{E}(X_{T_M^y\wedge T_0} 1_{T_M^y < t_0\wedge T_0}) > \mathbb{E}(X_{t_0\wedge T_0}),$$

de donde se concluye que $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala local estricta.

Ahora bien, el siguiente resultado presenta una segunda caracterización para el límite inferior que se requiere calcular

Proposición 3.4 *La única solución positiva $\tilde{y}_s$ de la ecuación (3.27) explota a infinito en un tiempo finito con probabilidad positiva bajo la medida $\mathbb{P}$, es decir, se tiene que*

$$\mathbb{P}(T_\infty^{\tilde{y}} < \infty) > 0,$$

si y solo si existe $t_0 > 0$ tal que

$$\liminf_{M\to\infty} \mathbb{E}(X_{T_M^y\wedge T_0} 1_{T_M^y < t_0\wedge T_0}) > 0,$$

y $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala local estricta.

Demostración. Lo primero que se observa es que, para la solución de (3.27), se tiene que

$$\mathbb{P}(T_\infty^{\tilde{y}} < \infty) = \mathbb{P}(T_\infty^{\tilde{y}} < T_0^{\tilde{y}})$$

ya que por construcción $\tilde{y}_s = 0$ para todo s mayor que $T_0^{\tilde{y}}$.

Así, se supone primero que

$$\mathbb{P}(T_\infty^{\tilde{y}} < \infty) > 0,$$

luego, basta tomar un $t_0 > 0$ suficientemente grande tal que

$$\mathbb{P}(T_\infty^{\tilde{y}} < t_0 \wedge T_0^{\tilde{y}}) > 0,$$

y entonces, para todo $M > 0$ se tiene que, gracias a (3.28),

$$\tilde{\mathbb{P}}_{t_0}(T_M^y < t_0 \wedge T_0) = \mathbb{P}(T_M^{\tilde{y}} < t_0 \wedge T_0^{\tilde{y}}) \geq \mathbb{P}(T_\infty^{\tilde{y}} < t_0 \wedge T_0^{\tilde{y}}) > 0.$$

Con esto, se puede tomar el límite inferior cuando M crece a infinito en la igualdad (3.24), con $t = t_0$, para concluir que

$$\liminf_{M\to\infty} \mathbb{E}(X_{T_M^y\wedge T_0} 1_{T_M^y < t_0\wedge T_0}) = x_0 \liminf_{M\to\infty} \tilde{\mathbb{P}}_{t_0}(T_M^y < t_0 \wedge T_0) \geq x_0 \mathbb{P}(T_\infty^{\tilde{y}} < t_0 \wedge T_0^{\tilde{y}}) > 0,$$

y se llega al resultado buscado.

Para la recíproca, se supone ahora que

$$\mathbb{P}(T_{\infty}^{\tilde{y}} < \infty) = 0,$$

y en este caso si se fija $t > 0$ arbitrario, entonces usando el teorema de convergencia dominada se tiene que

$$\tilde{\mathbb{P}}_t(T_M^y < t \wedge T_0) = \mathbb{P}(T_M^{\tilde{y}} < t \wedge T_0^{\tilde{y}}) \xrightarrow{M \to \infty} \mathbb{P}(T_{\infty}^{\tilde{y}} < t \wedge T_0^{\tilde{y}}) = 0.$$

Así, tomando límite inferior cuando M crece nuevamente en (3.24) se obtiene ahora que

$$\liminf_{M \to \infty} \mathbb{E}(X_{T_M^y \wedge T_0} 1_{T_M^y < t \wedge T_0}) = x_0 \liminf_{M \to \infty} \tilde{\mathbb{P}}_t(T_M^y < t \wedge T_0) = x_0 \mathbb{P}(T_{\infty}^{\tilde{y}} < t \wedge T_0^{\tilde{y}}) = 0,$$

para todo $t > 0$, lo que prueba lo buscado. □

Esta proposición reduce el problema de saber cuándo la solución $X_{t \wedge T_0}$ del sistema (3.1) es una martingala local estricta a estudiar cuándo la única solución positiva de la ecuación (3.27) explota a infinito en tiempo finito con probabilidad positiva, un problema que ya se abordó en el capítulo 2, pero se debe modificar para adaptarlo a esta situación particular.

Antes de entrar a encontrar estas condiciones, se procede a reescribir la ecuación de interés para esta parte, (3.27), omitiendo el tilde sobre la variable y por simplicidad, de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y_t &= \alpha y_t^{1+\frac{\beta-1}{\alpha}} \mathrm{d}\tilde{B}_t + \left\{ K\alpha y_t^{1+\frac{\delta-1}{\alpha}} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} y_t^{1+2\frac{\beta-1}{\alpha}} + \rho\alpha y_t^{2+\frac{\beta-1}{\alpha}} \right\} \mathrm{d}t \\ &= \alpha y_t^{\gamma} \mathrm{d}\tilde{B}_t + \left\{ K\alpha y_t^{\eta} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} y_t^{2\gamma-1} + \rho\alpha y_t^{\gamma+1} \right\} \mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{3.30}$$

donde se definen las constantes

$$\gamma = 1 + \frac{\beta - 1}{\alpha} \ , \eta = 1 + \frac{\delta - 1}{\alpha}.$$

Además, para que más adelante los cálculos sean más sencillos, conviene hacer un cambio de variable en (3.30) para eliminar la dependencia de y_t en el coeficiente de difusión. Para esto se consideran los siguientes cambios de variable

$$z_t = y_t^{1-\gamma} \ , \text{ si } \gamma \neq 1, \tag{3.31}$$

$$z_t = \log(y_t) \ , \text{ si } \gamma = 1, \tag{3.32}$$

donde es importante notar que γ es igual a 1 si y solo si $\beta = 1$, $\gamma < 1$ si y solo si $\beta < 1$ y $\gamma > 1$ si y solo si $\beta > 1$.

3.1. El Caso Subcrítico: $\beta < 1$

Con el cambio de variable propuesto, se puede enunciar el primer resultado que generaliza los resultados encontrados en [5] al problema principal de este trabajo

Teorema 3.5 *Se considera el sistema*

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = X_t\sigma_t^\alpha \mathrm{d}W_t \ , \qquad X_0 = x_0 > 0, \\ \mathrm{d}\sigma_t = \sigma_t^\beta \mathrm{d}B_t + K\sigma_t^\delta \mathrm{d}t \ , \qquad \sigma_0 > 0, \end{cases}$$

donde $\delta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ y $\beta < 1$. Más aun, se supone que σ_t es ***buena****. Se supone además que $K > 0$ o bien $\rho > 0$ (el caso $K < 0$ y $\rho \leq 0$ queda dentro del teorema 3.3). Luego, si $\rho > 0$ y sucede cualquiera de los siguientes casos no intersectantes*

1. $\delta < 2\beta - 1$, $\alpha + \beta > 1$.
2. $\delta = 2\beta - 1$, $\alpha + \beta > 1$.
3. $\delta > 2\beta - 1$, $\alpha + \beta > 1$, $\delta < \alpha + \beta$.
4. $\delta > 2\beta - 1$, $\alpha + \beta > 1$, $\delta = \alpha + \beta$, $K \in (-\rho, 0)$.

entonces $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala local estricta. Por otra parte, si $\rho > 0$ y no se cumple 1, 2, 3 o 4; o si $\rho \leq 0$, entonces $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala.

Demostración. Para comenzar, como $\beta < 1$ y entonces $\gamma < 1$, se aplica el cambio de variable propuesto en (3.31) y, usando la regla de cálculo de Itô en forma diferencial (ver [10], remark 3.3.5) con la función $f(x) = x^{1-\gamma}$ se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}z_t = \mathrm{d}f(y_t) &= f'(y_t)\mathrm{d}y_t + \frac{1}{2}f''(y_t)\mathrm{d}\langle y\rangle_t \\ &= (1-\gamma)y_t^{-\gamma}\mathrm{d}y_t + \frac{-\gamma(1-\gamma)}{2}y_t^{-(\gamma+1)}\mathrm{d}\langle y\rangle_t \\ &= \alpha(1-\gamma)\mathrm{d}\tilde{B}_t + (1-\gamma)\alpha\left\{Ky_t^{\eta-\gamma} + \frac{\alpha-1}{2}y_t^{\gamma-1} + \rho y_t - \frac{\gamma}{2}\alpha y_t^{\gamma-1}\right\}\mathrm{d}t \\ &= \alpha(1-\gamma)\mathrm{d}\tilde{B}_t + (1-\gamma)\alpha\left\{Kz_t^{\frac{\eta-\gamma}{1-\gamma}} + \rho z_t^{\frac{1}{1-\gamma}} + \frac{\alpha-1-\gamma\alpha}{2}z_t^{-1}\right\}\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{3.33}$$

donde se usa la igualdad (3.30) para deducir los diferenciales $\mathrm{d}y_t$ y $\mathrm{d}\langle y\rangle_t$, mientras que se usa que $y_t = z_t^{\frac{1}{1-\gamma}}$ para obtener la última ecuación en función de z_t. Es importante mencionar nuevamente que, en el caso en que $T_0 \wedge T_\infty^y < \infty$, esta ecuación es válida para $t < T_0 \wedge T_\infty^y$, que es el intervalo de interés en esta sección.

Ahora bien, se tienen además las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \frac{\eta-\gamma}{1-\gamma} &= \frac{\frac{\delta-\beta}{\alpha}}{\frac{1-\beta}{\alpha}} = \frac{\delta-\beta}{1-\beta}, \\ \alpha - 1 - \gamma\alpha &= \alpha - 1 - \alpha - \beta + 1 = -\beta, \\ \alpha(1-\gamma) &= 1-\beta, \\ \frac{1}{1-\gamma} &= \frac{\alpha}{1-\beta}, \end{aligned}$$

las cuales, si se reemplazan en (3.33), entregan la siguiente ecuación para z_t

$$\begin{aligned} \mathrm{d}z_t &= (1-\beta)\mathrm{d}\tilde{B}_t + \left\{K(1-\beta)z_t^{\frac{\delta-\beta}{1-\beta}} + \rho(1-\beta)z_t^{\frac{\alpha}{1-\beta}} + \frac{\beta(\beta-1)}{2}z_t^{-1}\right\}\mathrm{d}t \\ &= (1-\beta)\mathrm{d}\tilde{B}_t + b(z_t)\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{3.34}$$

donde

$$b(\xi) = K(1-\beta)\xi^{\frac{\delta-\beta}{1-\beta}} + \rho(1-\beta)\xi^{\frac{\alpha}{1-\beta}} + \frac{\beta(\beta-1)}{2}\xi^{-1}. \tag{3.35}$$

Por otra parte, es muy importante notar que como $\gamma < 1$ entonces $1-\gamma > 0$. Esto dice que

$$y_t \to \infty \Longleftrightarrow z_t = y_t^{1-\gamma} \to \infty,$$

lo que implica que estudiar cuándo el tiempo de explosión a infinito de la solución y_t tiene probabilidad positiva de ser finito es lo mismo que estudiar cuándo el tiempo de explosión a infinito de z_t satisface la condición. Esto es distinto en el caso $\gamma > 1$, y se ven las diferencias más adelante.

Ahora, para estudiar el comportamiento del tiempo de explosión a infinito de la solución de (3.34), desde ahora T_∞^z, se recuerda lo hecho en el capítulo 2 y en particular el test de explosión de Feller que dice que

$$\mathbb{P}(T_\infty^z = \infty) = 1 \Longleftrightarrow \lim_{x\to\infty} v(x) = \infty,$$

donde en este caso

$$\begin{aligned} &v(x) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, \\ &v(x) = \int_1^x p'(y) \int_1^y \frac{2}{p'(z)(1-\beta)^2} \mathrm{d}z\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{3.36}$$

y

$$\begin{aligned} &p(x) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \\ &p(x) = \int_1^x \exp\left\{-2\int_1^y \frac{b(\xi)}{(1-\beta)^2}\mathrm{d}\xi\right\} \mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Para poder seguir con el análisis, se calcula

$$\frac{-2}{(1-\beta)^2}\int_1^y b(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{-2}{(1-\beta)^2}\int_1^y \left(K(1-\beta)\xi^{\frac{\delta-\beta}{1-\beta}} + \rho(1-\beta)\xi^{\frac{\alpha}{1-\beta}} + \frac{\beta(\beta-1)}{2}\xi^{-1}\right)\mathrm{d}\xi$$
$$= \begin{cases} \frac{-2}{(1-\beta)^2}\left(K(1-\beta)\ln(y) + \frac{\beta(\beta-1)}{2}\ln(y) + \frac{\rho(1-\beta)^2}{\alpha+1-\beta}y^{\frac{\alpha}{1-\beta}+1} - \frac{\rho(1-\beta)^2}{\alpha+1-\beta}\right) & \text{si } \theta = 0, \\ \frac{-2}{(1-\beta)^2}\left(\frac{K(1-\beta)^2}{\theta}y^{\frac{\theta}{1-\beta}} - \frac{K(1-\beta)^2}{\theta} + \frac{\beta(\beta-1)}{2}\ln(y) + \frac{\rho(1-\beta)^2}{\alpha+1-\beta}y^{\frac{\alpha}{1-\beta}+1} - \frac{\rho(1-\beta)^2}{\alpha+1-\beta}\right) & \text{si } \theta \neq 0, \end{cases}$$

donde se nota la primera diferencia dependiendo del caso a estudiar, notando que

$$\theta = \delta - 2\beta + 1 = 0 \Longleftrightarrow \frac{\delta-\beta}{1-\beta} = -1,$$

y luego la integral es distinta en este caso. Esto no sucede con la otra potencia de ξ, pues como $\alpha > 0$ y $\beta < 1$, entonces $\frac{\alpha}{1-\beta} > 0$.

Con estas integrales calculadas y de (3.37), se tiene directamente entonces que

$$p'(x) = \begin{cases} y^{\frac{\beta-2K}{1-\beta}} \exp\left(\frac{-2\rho}{\alpha+1-\beta} y^{\frac{\alpha}{1-\beta}+1}\right) \exp\left(\frac{2\rho}{\alpha+1-\beta}\right) & \text{si } \theta = 0, \\ y^{\frac{\beta}{1-\beta}} \exp\left(\frac{-2K}{\theta} y^{\frac{\theta}{1-\beta}}\right) \exp\left(\frac{-2\rho}{\alpha+1-\beta} y^{\frac{\alpha}{1-\beta}+1}\right) \exp\left(\frac{2\rho}{\alpha+1-\beta} + \frac{2K}{\theta}\right) & \text{si } \theta \neq 0. \end{cases} \tag{3.38}$$

Desde este momento, se trata cada caso por separado, comenzando con el caso $\theta = 0$, o $\delta = 2\beta - 1$. Aquí lo primero que hay que notar es que, como $\beta < 1$ entonces, gracias al teorema 2.6, se tiene que la solución σ_t es buena para cualquier elección del resto de los parámetros, lo que implica que se deben estudiar todos los casos. Para seguir con el análisis, se observa de (3.36) que

$$\begin{aligned} v(x) = \\ \frac{2}{(1-\beta)^2} \int_1^x y^{\frac{\beta-2K}{1-\beta}} \exp\left(\frac{-2\rho}{\alpha+1-\beta} y^{\frac{\alpha}{1-\beta}+1}\right) \int_1^y z^{\frac{2K-\beta}{1-\beta}} \exp\left(\frac{2\rho}{\alpha+1-\beta} z^{\frac{\alpha}{1-\beta}+1}\right) \mathrm{d}z\mathrm{d}y \\ = \frac{2}{(1-\beta)^2} \int_1^x y^a \exp\left(-Ay^{b+1}\right) \int_1^y z^{-a} \exp\left(Az^{b+1}\right) \mathrm{d}z\mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{3.39}$$

donde

$$a = \frac{\beta - 2K}{1-\beta} \ ; \ b = \frac{\alpha}{1-\beta} > 0 \ ; \ A = \frac{2\rho}{\alpha+1-\beta}.$$

Comenzando con el caso $\rho > 0$, se tiene entonces en particular que $A > 0$ y por ende, independiente del signo que tenga a y como $b > 0$, se cumple que

$$z^{-a} \exp\left(Az^{b+1}\right) \xrightarrow{z\to\infty} \infty,$$

y de igual manera

$$\int_1^y z^{-a} \exp\left(Az^{b+1}\right) \mathrm{d}z \xrightarrow{y\to\infty} \infty.$$

Así, de (3.39) se tiene que

$$v(x) = \frac{2}{(1-\beta)^2} \int_1^x f(y)\mathrm{d}y,$$

donde $f(y)$ cumple, gracias a aplicar la regla de L'Hôpital, que

$$\begin{aligned} \lim_{y\to\infty} \frac{f(y)}{y^{-b}} &= \lim_{y\to\infty} \frac{\int_1^y z^{-a} \exp\left(Az^{b+1}\right) \mathrm{d}z}{y^{-(a+b)} \exp\left(Ay^{b+1}\right)} \\ &= \lim_{y\to\infty} \frac{y^{-a} \exp\left(Ay^{b+1}\right)}{\exp\left(Ay^{b+1}\right)\left(A(b+1)y^{-a} - (a+b)y^{-(a+b+1)}\right)} \\ &= \lim_{y\to\infty} \frac{1}{A(b+1) - (a+b)y^{-(b+1)}} = \frac{1}{A(b+1)} \in (0,\infty). \end{aligned}$$

Luego, gracias al criterio del cuociente de convergencia de integrales, se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} v(x) \sim \int_1^\infty y^{-b}\mathrm{d}y,$$

y que esta última integral es finita si y solo si $b > 1$, lo que equivale a que $\alpha+\beta > 1$, y en este caso, que es el segundo caso del enunciado del teorema, $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala local estricta gracias a la proposición 3.4. Ahora, si $\alpha + \beta \leq 1$ entonces la integral anterior es infinita y por ende $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala debido al mismo resultado.

Pasando al caso $\rho = 0$, se tiene que $A = 0$ y entonces de (3.39) se tiene

$$v(x) = \frac{2}{(1-\beta)^2}\int_1^x y^a \int_1^y z^{-a}\mathrm{d}z\mathrm{d}y,$$

luego basta estudiar el comportamiento de la doble integral

$$\int_1^x y^a \int_1^y z^{-a}\mathrm{d}z\mathrm{d}y,$$

para todos los valores de a. Más aun, se estudia, para un $c_0 \geq 1$ fijo, el comportamiento de

$$\int_{c_0}^x y^a \int_{c_0}^y z^{-a}\mathrm{d}z\mathrm{d}y, \tag{3.40}$$

pues el caso $c_0 \neq 1$ es usado más adelante.

En efecto, si $a = 0$, se tiene que

$$\int_{c_0}^x y^a \int_{c_0}^y z^{-a}\mathrm{d}z\mathrm{d}y = \int_{c_0}^x \int_{c_0}^y \mathrm{d}z\mathrm{d}y = \int_{c_0}^x (y-c_0)\mathrm{d}y = \frac{x^2}{2} - \frac{c_0^2}{2} - c_0(x-c_0) \xrightarrow{x\to\infty} \infty,$$

mientras que si $a > 0$, entonces

$$\int_{c_0}^x y^a \int_{c_0}^y z^{-a}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \geq \int_{c_0}^x y^a y^{-a}\int_{c_0}^y \mathrm{d}z\mathrm{d}y = \int_{c_0}^x\int_{c_0}^y \mathrm{d}z\mathrm{d}y \xrightarrow{x\to\infty} \infty,$$

por el caso anterior. Finalmente cuando $a < 0$ se ve que

$$\begin{aligned}
\int_{c_0}^x y^a \int_{c_0}^y z^{-a}\mathrm{d}z\mathrm{d}y &\geq x^a \int_{c_0}^x \int_{c_0}^y z^{-a}\mathrm{d}z\mathrm{d}y = x^a \int_{c_0}^x \left\{\frac{y^{-a+1}}{-a+1} - \frac{c_0^{-a+1}}{-a+1}\right\}\mathrm{d}y \\
&= x^a\left\{\frac{x^{-a+2}}{(-a+1)(-a+2)} - \frac{c_0^{-a+2}}{(-a+1)(-a+2)} - \frac{xc_0^{-a+1}}{-a+1} + \frac{c_0^{-a+2}}{-a+1}\right\} \\
&= \frac{x^2}{(-a+1)(-a+2)} - \frac{c_0^{-a+2}}{x^{-a}(-a+1)(-a+2)} - \frac{x^{1+a}c_0^{-a+1}}{-a+1} + \frac{c_0^{-a+2}}{(-a+1)x^{-a}} \\
&\xrightarrow{x\to\infty} \infty,
\end{aligned}$$

de donde se concluye que $\lim_{x\to\infty} v(x) = \infty$ en todos los casos, y por ende, tomando $c_0 = 1$, si $\rho = 0$, $X_{t\wedge T_0}$ es siempre una martingala.

Para finalizar el caso $\delta = 2\beta - 1$ se considera la situación donde $\rho < 0$ y aquí basta notar que como $A < 0$ entonces

$$\exp\left(Az^{b+1}\right) \xrightarrow{z\to\infty} 0,$$

de forma decreciente, luego se tiene que

$$\begin{aligned} v(x) &\geq \frac{2}{(1-\beta)^2} \int_1^x y^a \exp\left(-Ay^{b+1}\right) \exp\left(Ay^{b+1}\right) \int_1^y z^{-a} \mathrm{d}z\mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{(1-\beta)^2} \int_1^x y^a \int_1^y z^{-a} \mathrm{d}z\mathrm{d}y \xrightarrow{x\to\infty} \infty, \end{aligned}$$

por lo ya calculado para (3.40), lo que implica nuevamente que cuando $\rho < 0$, $X_{t\wedge T_0}$ es siempre una martingala.

Siguiendo ahora con el caso $\delta > 2\beta - 1$, o $\theta > 0$, lo primero es notar que gracias a (3.38) se tiene que

$$\begin{aligned} &v(x) = \\ &\frac{2}{(1-\beta)^2} \int_1^x \exp\left(\frac{-2Ky^{\frac{\theta}{1-\beta}}}{\theta} - \frac{2\rho y^{\frac{\alpha}{1-\beta}+1}}{\alpha+1-\beta}\right) y^{\frac{\beta}{1-\beta}} \int_1^y \exp\left(\frac{2Kz^{\frac{\theta}{1-\beta}}}{\theta} + \frac{2\rho z^{\frac{\alpha}{1-\beta}+1}}{\alpha+1-\beta}\right) z^{\frac{-\beta}{1-\beta}} \mathrm{d}z\mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{(1-\beta)^2} \int_1^x \exp\left(-Cy^{\mathrm{d}} - Ay^{b+1}\right) y^{\mathrm{e}} \int_1^y \exp\left(Cz^{\mathrm{d}} + Az^{b+1}\right) z^{-\mathrm{e}} \mathrm{d}z\mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{3.41}$$

donde

$$\begin{aligned} C = \frac{2K}{\theta} \ ; \ A = \frac{2\rho}{\alpha+1-\beta} \ ; \ \mathrm{d} = \frac{\theta}{1-\beta} > 0 \ ; \\ b = \frac{\alpha}{1-\beta} > 0 \ ; \ \mathrm{e} = \frac{\beta}{1-\beta} > 0. \end{aligned}$$

Para lograr un análisis exhaustivo de este caso se deben además considerar 3 casos distintos que tienen que ver con cuando

$$b + 1 = \mathrm{d} \iff \alpha + 1 - \beta = \theta \iff \delta = \alpha + \beta.$$

Con esto en mente se puede comenzar el análisis por el caso $\rho < 0$, lo que implica que $A < 0$ y al mismo tiempo que $K > 0$ y por ende $C > 0$, gracias a la condición impuesta por el teorema sobre K y ρ. Es importante además notar que como se tiene en este caso que $K > 0$ y $\delta > 2\beta - 1$, para que la solución de σ_t sea buena se debe imponer que $\delta \leq 1$, recordando el teorema 2.6. Aquí se distinguen 3 casos. Si se cumple que $\delta = \alpha + \beta$, entonces

$$v(x) = \frac{2}{(1-\beta)^2} \int_1^x \exp\left(-(C+A)y^{b+1}\right) y^{\mathrm{e}} \int_1^y \exp\left((C+A)z^{b+1}\right) z^{-\mathrm{e}} \mathrm{d}z\mathrm{d}y, \tag{3.42}$$

y lo que controla la explosión de este término depende ahora del signo de $C + A$. Ahora, como $\delta = \alpha + \beta$, entonces se tiene que

$$C = -A \iff \frac{2K}{\delta - 2\beta + 1} = \frac{-2\rho}{\alpha + 1 - \beta} \iff K = -\rho.$$

Esto dice que se deben analizar otros 3 subcasos dentro de $\delta = \alpha + \beta$. Si $K = -\rho$, entonces $C + A = 0$ y

$$(3.42) = \frac{2}{(1-\beta)^2} \int_1^x y^{\mathrm{e}} \int_1^y z^{-\mathrm{e}} \mathrm{d}z \mathrm{d}y \xrightarrow{x\to\infty} \infty,$$

donde este último límite ya ha sido calculado al estudiar el comportamiento de (3.40), y se tiene entonces que $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala.

Ahora, si $C + A < 0$ entonces

$$\exp\left((C+A)z^{b+1}\right) \xrightarrow{z\to\infty} 0,$$

y de manera monótona, pues $b > 0$; luego para x suficientemente grande se tiene que

$$\begin{aligned}(3.42) \geq \frac{2}{(1-\beta)^2} \int_1^x \exp\left(-(C+A)y^{b+1}\right) \exp\left((C+A)y^{b+1}\right) y^{\mathrm{e}} \int_1^y z^{-\mathrm{e}} \mathrm{d}z \mathrm{d}y \\ = \frac{2}{(1-\beta)^2} \int_1^x y^{\mathrm{e}} \int_1^y z^{-\mathrm{e}} \mathrm{d}z \mathrm{d}y \xrightarrow{x\to\infty} \infty,\end{aligned}$$

por lo ya visto. Nuevamente se concluye que $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala.

Por último si $C + A > 0$, se tiene que

$$\exp\left((C+A)z^{b+1}\right) \xrightarrow{z\to\infty} \infty,$$

y más aun

$$\int_1^y \exp\left((C+A)z^{b+1}\right) z^{-\mathrm{e}} \mathrm{d}z \xrightarrow{y\to\infty} \infty,$$

luego se tiene que

$$(3.42) = \frac{2}{(1-\beta)^2} \int_1^y f(y) \mathrm{d}y,$$

donde $f(y)$ cumple que

$$\begin{aligned}\lim_{y\to\infty} \frac{f(y)}{y^{-b}} &= \lim_{y\to\infty} \frac{\int_1^y z^{-\mathrm{e}} \exp\left((A+C)z^{b+1}\right) \mathrm{d}z}{y^{-(\mathrm{e}+b)} \exp\left((A+C)y^{b+1}\right)} \\ &= \lim_{y\to\infty} \frac{y^{-\mathrm{e}} \exp\left((A+C)y^{b+1}\right)}{\exp\left((A+C)y^{b+1}\right)\left((A+C)(b+1)y^{-\mathrm{e}} - (\mathrm{e}+b)y^{-(\mathrm{e}+b+1)}\right)} \\ &= \lim_{y\to\infty} \frac{1}{(A+C)(b+1) - (\mathrm{e}+b)y^{-(b+1)}} = \frac{1}{(A+C)(b+1)} \in (0,\infty), \qquad (3.43)\end{aligned}$$

por la regla de L'Hôpital. Se concluye como antes que

$$\lim_{x\to\infty} v(x) = \frac{2}{(1-\beta)^2} \int_1^\infty f(y) \mathrm{d}y \sim \int_1^\infty y^{-b} \mathrm{d}y,$$

y esta última integral es finita si y solo si $b > 1$, es decir si $\alpha + \beta > 1$. Sin embargo, hay que recordar que como en este caso $\delta > 2\beta - 1$ y $K > 0$, entonces se debe tener que $\delta \leq 1$, y como $\delta = \alpha + \beta$, por ende en este caso $\alpha + \beta \leq 1$ siempre, luego esta integral siempre diverge y por ende $X_{t\wedge T_0}$ es siempre una martingala.

Ahora, cuando $\delta > \alpha + \beta$, se tiene entonces que, como $\mathrm{d} > b+1$,

$$\exp\left(Cz^{\mathrm{d}} + Az^{b+1}\right) = \exp\left(z^{\mathrm{d}}(C + Az^{(b+1)-\mathrm{d}})\right) \xrightarrow{z\to\infty} \infty,$$

y por ende

$$\int_1^y \exp\left(Cz^{\mathrm{d}} + Az^{b+1}\right) z^{-\mathrm{e}}\mathrm{d}z \xrightarrow{y\to\infty} \infty.$$

Así, de (3.41), se tiene que

$$v(x) = \frac{2}{(1-\beta)^2}\int_1^x f(y)\mathrm{d}y,$$

donde $f(y)$ cumple que

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to\infty} \frac{f(y)}{y^{-(\mathrm{d}-1)}} &= \lim_{y\to\infty} \frac{\int_1^y \exp\left(Cz^{\mathrm{d}} + Az^{b+1}\right) z^{-\mathrm{e}}\mathrm{d}z}{\exp\left(Cy^{\mathrm{d}} + Ay^{b+1}\right) y^{-(\mathrm{e}+\mathrm{d}-1)}} \\
&= \lim_{y\to\infty} \frac{\exp\left(Cy^{\mathrm{d}} + Ay^{b+1}\right) y^{-\mathrm{e}}}{\exp\left(Cy^{\mathrm{d}} + Ay^{b+1}\right)\left(C\mathrm{d}y^{-\mathrm{e}} + A(b+1)y^{(b+1)-\mathrm{d}-\mathrm{e}} - (\mathrm{e}+\mathrm{d}-1)y^{-(\mathrm{e}+\mathrm{d})}\right)} \\
&= \lim_{y\to\infty} \frac{1}{C\mathrm{d} + A(b+1)y^{(b+1)-\mathrm{d}} - (\mathrm{e}+\mathrm{d}-1)y^{-\mathrm{d}}} = \frac{1}{C\mathrm{d}} \in (0,\infty), \qquad (3.44)
\end{aligned}$$

y entonces, como en casos anteriores

$$\lim_{x\to\infty} v(x) = \frac{2}{(1-\beta)^2}\int_1^\infty f(y)\mathrm{d}y \sim \int_1^\infty y^{-(\mathrm{d}-1)}\mathrm{d}y,$$

donde esta última integral es finita si y solo si $\mathrm{d}-1 > 1$, lo que equivale a que $\delta - 2\beta + 1 > 2 - 2\beta$ ó $\delta > 1$; pero para asegurar que σ_t fuese **buena**, una condición del teorema, se había impuesto que $\delta \leq 1$ para este caso y por ende la integral es siempre infinita y $X_{t\wedge T_0}$ es siempre una martingala.

Por último, si $\delta < \alpha + \beta$ se tiene que

$$\exp\left(Cz^{\mathrm{d}} + Az^{b+1}\right) = \exp\left(z^{b+1}(A + Cz^{\mathrm{d}-(b+1)})\right) \xrightarrow{z\to\infty} 0,$$

pues $A < 0$, y lo hace de manera monótona desde un $z_0 > 1$ fijo. Luego para $x > z_0$ suficientemente grande se cumple, gracias a la positividad de los términos integrados, que

$$\begin{aligned}
v(x) &\geq \frac{2}{(1-\beta)^2}\int_1^x \exp\left(-Cy^{\mathrm{d}} - Ay^{b+1}\right) y^{\mathrm{e}} 1_{y\geq z_0} \int_1^y \exp\left(Cz^{\mathrm{d}} + Az^{b+1}\right) z^{-\mathrm{e}}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{(1-\beta)^2}\int_{z_0}^x \exp\left(-Cy^{\mathrm{d}} - Ay^{b+1}\right) y^{\mathrm{e}} \int_1^y \exp\left(Cz^{\mathrm{d}} + Az^{b+1}\right) z^{-\mathrm{e}}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&\geq \frac{2}{(1-\beta)^2}\int_{z_0}^x \exp\left(-Cy^{\mathrm{d}} - Ay^{b+1}\right) y^{\mathrm{e}} \int_{z_0}^y \exp\left(Cz^{\mathrm{d}} + Az^{b+1}\right) z^{-\mathrm{e}}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&\geq \frac{2}{(1-\beta)^2}\int_{z_0}^x \exp\left(-Cy^{\mathrm{d}} - Ay^{b+1}\right) \exp\left(Cy^{\mathrm{d}} + Ay^{b+1}\right) y^{\mathrm{e}} \int_{z_0}^y z^{-\mathrm{e}}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{(1-\beta)^2}\int_{z_0}^x y^{\mathrm{e}} \int_{z_0}^y z^{-\mathrm{e}}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \xrightarrow{x\to\infty} \infty,
\end{aligned}$$

por lo visto en (3.40), y $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala. Luego de esto, se ve que se ha demostrado que para $\rho < 0$, $X_{t\wedge T_0}$ es siempre una martingala, que es una de las conclusiones del teorema.

Siguiendo con los casos, se presenta el análsis para cuando $\rho = 0$, y por ende $A = 0$. Gracias a las imposiciones del teorema, se debe tener también que $K > 0$ y así $C > 0$. Nuevamente, como se trata el caso $\delta > 2\beta - 1$ y $K > 0$, luego se debe imponer que $\delta \leq 1$ para que σ_t sea **buena**. En este caso además, se tiene que

$$v(x) = \frac{2}{(1-\beta)^2} \int_1^x \exp\left(-Cy^{\mathrm{d}}\right) y^{\mathrm{e}} \int_1^y \exp\left(Cz^{\mathrm{d}}\right) z^{-\mathrm{e}} \mathrm{d}z\mathrm{d}y, \tag{3.45}$$

donde

$$\exp\left(Cz^{\mathrm{d}}\right) \xrightarrow{z\to\infty} \infty,$$

y

$$\int_1^y \exp\left(Cz^{\mathrm{d}}\right) z^{-\mathrm{e}} \mathrm{d}z\mathrm{d}y \xrightarrow{y\to\infty} \infty.$$

Así, se tiene que

$$(3.45) = \frac{2}{(1-\beta)^2} \int_1^x f(y)\mathrm{d}y,$$

y $f(y)$ cumple además que

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to\infty} \frac{f(y)}{y^{-(\mathrm{d}-1)}} &= \lim_{y\to\infty} \frac{\int_1^y \exp\left(Cz^{\mathrm{d}}\right) z^{-\mathrm{e}} \mathrm{d}z}{\exp\left(Cy^{\mathrm{d}}\right) y^{-(\mathrm{e}+\mathrm{d}-1)}} \\
&= \lim_{y\to\infty} \frac{\exp\left(Cy^{\mathrm{d}}\right) y^{-\mathrm{e}}}{\exp\left(Cy^{\mathrm{d}}\right)\left(C\mathrm{d}y^{-\mathrm{e}} - (\mathrm{e}+\mathrm{d}-1)y^{-(\mathrm{e}+\mathrm{d})}\right)} \\
&= \lim_{y\to\infty} \frac{1}{C\mathrm{d} - (\mathrm{e}+\mathrm{d}-1)y^{-\mathrm{d}}} = \frac{1}{C\mathrm{d}} \in (0,\infty),
\end{aligned}$$

debido a la regla de L'Hôpital nuevamente. Esto dice que

$$\lim_{x\to\infty} v(x) = \frac{2}{(1-\beta)^2} \int_1^\infty f(y)\mathrm{d}y \sim \int_1^\infty y^{-(\mathrm{d}-1)}\mathrm{d}y,$$

donde se sabe que esta última integral es finita si y solo si $\mathrm{d} - 1 > 1$, ó $\delta > 1$. No obstante, para que σ_t sea **buena**, se impuso que $\delta \leq 1$ en este caso, lo que implica entonces que $X_{t\wedge T_0}$ siempre es martingala, y así finaliza el análisis del caso $\rho = 0$, encontrando nuevamente que $X_{t\wedge T_0}$ es siempre una martingala, lo que es una conclusión del teorema.

Pasando al caso $\rho > 0$, como aquí no se fuerza el signo de K, es importante ponerse en cada caso, comenzando por $K < 0$. Esto implica que se tiene $A > 0$ y que $C < 0$. Al igual que en lo hecho anteriormente, conviene dividir el análisis dependiendo de cómo se compara δ con $\alpha + \beta$.

Si $\delta = \alpha + \beta$, entonces nuevamente hay que dividir el problema en 3 subcasos distintos dependiendo de cómo se compare K con $-\rho$. Si $K = -\rho$, entonces $-A = C$ y aquí, de (3.41), se tiene que

$$v(x) = \frac{2}{(1-\beta)^2} \int_1^x y^{\mathrm{e}} \int_1^y z^{-\mathrm{e}} \mathrm{d}z \mathrm{d}y \xrightarrow{x \to \infty} \infty,$$

por lo hecho para (3.40). Luego $X_{t \wedge T_0}$ es una martingala en este caso. Ahora, si $K < -\rho$, o sea $C < -A$, entonces

$$\exp\left((C+A)z^{b+1}\right) \xrightarrow{z \to \infty} 0,$$

y lo hace de manera monótona, luego para x suficientemente grande se cumple que

$$\begin{aligned} v(x) &\geq \frac{2}{(1-\beta)^2} \int_1^x \exp\left(-(C+A)y^{b+1}\right) \exp\left((C+A)y^{b+1}\right) y^{\mathrm{e}} \int_1^y z^{-\mathrm{e}} \mathrm{d}z \mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{(1-\beta)^2} \int_1^x y^{\mathrm{e}} \int_1^y z^{-\mathrm{e}} \mathrm{d}z \mathrm{d}y \xrightarrow{x \to \infty} \infty, \end{aligned}$$

y entonces $X_{t \wedge T_0}$ también es una martingala en este caso.

Finalmente, cuando $K > -\rho$, es decir $-A < C$, se ve que

$$\exp\left((C+A)z^{b+1}\right) \xrightarrow{z \to \infty} \infty,$$

y nuevamente

$$\int_1^y \exp\left((C+A)z^{b+1}\right) z^{-\mathrm{e}} \mathrm{d}z \xrightarrow{y \to \infty} \infty,$$

y así, de (3.42) se obtiene, al igual que para el caso $\rho < 0$ y $K > 0$

$$v(x) = \frac{2}{(1-\beta)^2} \int_1^x f(y) \mathrm{d}y,$$

donde $f(y)$ cumple que

$$\lim_{y \to \infty} \frac{f(y)}{y^{-b}} = \frac{1}{(A+C)(b+1)} \in (0, \infty),$$

como en (3.43). Luego se concluye que

$$\lim_{x \to \infty} v(x) = \frac{2}{(1-\beta)^2} \int_1^\infty f(y) \mathrm{d}y \sim \int_1^\infty y^{-b} \mathrm{d}y,$$

y esta integral es finita si y solo si $b > 1$, es decir cuando $\alpha + \beta = \delta > 1$. En este caso, a diferencia de los anteriores, como $K < 0$, no se tiene necesariamente que $\delta \leq 1$, entonces si $\alpha + \beta > 1$, $X_{t \wedge T_0}$ es una martingala local estricta, lo que cae dentro del cuarto caso del teorema. Por otro lado, si $\alpha + \beta \leq 1$, entonces $X_{t \wedge T_0}$ es una martingala, con lo que finaliza el caso $\delta = \alpha + \beta$.

Ahora, cuando $\delta > \alpha + \beta$, ó $\mathrm{d} > b+1$; y como $C < 0$, se tiene que

$$\exp\left(Cz^{\mathrm{d}} + Az^{b+1}\right) = \exp\left(z^{\mathrm{d}}(C + Az^{(b+1)-\mathrm{d}})\right) \xrightarrow{z\to\infty} 0,$$

y nuevamente lo hace de manera monótona desde un punto $z_0 > 1$, luego para $x > z_0$ suficientemente grande se tiene que

$$\begin{aligned} v(x) &\geq \frac{2}{(1-\beta)^2} \int_{z_0}^{x} \exp\left(-Cy^{\mathrm{d}} - Ay^{b+1}\right) \exp\left(Cy^{\mathrm{d}} + Ay^{b+1}\right) y^{\mathrm{e}} \int_{z_0}^{y} z^{-\mathrm{e}} \mathrm{d}z\mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{(1-\beta)^2} \int_{z_0}^{x} y^{\mathrm{e}} \int_{z_0}^{y} z^{-\mathrm{e}} \mathrm{d}z\mathrm{d}y \xrightarrow{x\to\infty} \infty, \end{aligned}$$

y luego $X_{t\wedge T_0}$ es siempre una martingala en este caso.

Por último, cuando $\delta < \alpha + \beta$, ó $\mathrm{d} < b+1$, se ve que

$$\exp\left(Cz^{\mathrm{d}} + Az^{b+1}\right) = \exp\left(z^{b+1}(A + Cz^{\mathrm{d}-(b+1)})\right) \xrightarrow{z\to\infty} \infty,$$

y de nuevo

$$\int_{1}^{y} \exp\left(Cz^{\mathrm{d}} + Az^{b+1}\right) z^{-\mathrm{e}} \mathrm{d}z \xrightarrow{y\to\infty} \infty,$$

y así se cumple que

$$v(x) = \frac{2}{(1-\beta)^2} \int_{1}^{x} f(y)\mathrm{d}y,$$

donde $f(y)$ satisface que

$$\begin{aligned} \lim_{y\to\infty} \frac{f(y)}{y^{-b}} &= \lim_{y\to\infty} \frac{\int_1^y \exp\left(Cz^{\mathrm{d}} + Az^{b+1}\right) z^{-\mathrm{e}}\mathrm{d}z}{\exp\left(Cy^{\mathrm{d}} + Ay^{b+1}\right) y^{-(\mathrm{e}+b)}} \\ &= \lim_{y\to\infty} \frac{\exp\left(Cy^{\mathrm{d}} + Ay^{b+1}\right) y^{-\mathrm{e}}}{\exp\left(Cy^{\mathrm{d}} + Ay^{b+1}\right)\left(C\mathrm{d}y^{\mathrm{d}-(b+1)-\mathrm{e}} + A(b+1)y^{-\mathrm{e}} - (\mathrm{e}+b)y^{-(\mathrm{e}+b+1)}\right)} \\ &= \lim_{y\to\infty} \frac{1}{C\mathrm{d}y^{\mathrm{d}-(b+1)} + A(b+1) - (\mathrm{e}+b)y^{-(b+1)}} = \frac{1}{A(b+1)} \in (0,\infty). \end{aligned} \tag{3.46}$$

Luego se concluye nuevamente la relación

$$\lim_{x\to\infty} v(x) = \frac{2}{(1-\beta)^2} \int_{1}^{\infty} f(y)\mathrm{d}y \sim \int_{1}^{\infty} y^{-b}\mathrm{d}y,$$

y esta última integral es finita si y solo si $b > 1$ o equivalentemente $\alpha + \beta > 1$. En este caso $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala local estricta, y coincide con el caso tres del enunciado del teorema, mientras que si $\alpha + \beta \leq 1$, $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala.

Para completar el caso $\theta > 0$, queda solamente analizar el caso cuando ρ, $K > 0$ o lo que es equivalente: A, $C > 0$. Es importante nuevamente recalcar que como $\delta > 2\beta - 1$ y $K > 0$, se debe imponer que $\delta \leq 1$ para trabajar con una solución **buena** de σ_t. Volviendo a los casos usados anteriormente, se comienza con estudiar lo que ocurre cuando $\delta = \alpha + \beta$ o $b + 1 = \mathrm{d}$.

En esta situación se vuelve a tener la igualdad (3.42) y, como $C+A>0$ luego

$$\exp\left((C+A)z^{b+1}\right) \xrightarrow{z\to\infty} \infty,$$

y

$$\int_1^y \exp\left((C+A)z^{b+1}\right) z^{-\mathrm{e}}\mathrm{d}z \xrightarrow{y\to\infty} \infty,$$

Así, de nuevo se cumple que

$$v(x) = \frac{2}{(1-\beta)^2}\int_1^y f(y)\mathrm{d}y,$$

donde $f(y)$ cumple que

$$\lim_{y\to\infty} \frac{f(y)}{y^{-b}} = \frac{1}{(A+C)(b+1)} \in (0,\infty),$$

al igual que en (3.43). De aquí nuevamente se concluye que

$$\lim_{x\to\infty} v(x) = \frac{2}{(1-\beta)^2}\int_1^\infty f(y)\mathrm{d}y \sim \int_1^\infty y^{-b}\mathrm{d}y,$$

y esta última integral es finita si y solo si $b>1$ o equivalentemente $\delta=\alpha+\beta>1$. Sin embargo, como en este caso $\delta\leq 1$ se tiene entonces que $X_{t\wedge T_0}$ es siempre una martingala.

Ahora, si $\delta<\alpha+\beta$ se tiene nuevamente que

$$\exp\left(Cz^{\mathrm{d}}+Az^{b+1}\right) = \exp\left(z^{b+1}(A+Cz^{\mathrm{d}-(b+1)})\right) \xrightarrow{z\to\infty}, \infty$$

y de nuevo

$$\int_1^y \exp\left(Cz^{\mathrm{d}}+Az^{b+1}\right) z^{-\mathrm{e}}\mathrm{d}z \xrightarrow{y\to\infty} \infty,$$

y luego se tiene

$$v(x) = \frac{2}{(1-\beta)^2}\int_1^x f(y)\mathrm{d}y,$$

donde $f(y)$ cumple que

$$\lim_{y\to\infty} \frac{f(y)}{y^{-b}} = \frac{1}{A(b+1)} \in (0,\infty),$$

como en (3.46). Con esto se obtiene que

$$\lim_{x\to\infty} v(x) = \frac{2}{(1-\beta)^2}\int_1^\infty f(y)\mathrm{d}y \sim \int_1^\infty y^{-b}\mathrm{d}y,$$

donde esta última integral es finita si y solo si $b > 1$, o $\alpha+\beta > 1$. Si esto sucede, $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala local estricta y se observa que este es el caso tres del teorema. Si se tiene lo contrario, entonces $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala.

Para finalizar el caso ρ, $K > 0$ y así dar término a $\theta > 0$, queda ver que sucede cuando $\delta > \alpha+\beta$. Aquí se tiene que

$$\exp\left(Cz^{\mathrm{d}} + Az^{b+1}\right) = \exp\left(z^{\mathrm{d}}(C + Az^{(b+1)-\mathrm{d}})\right) \xrightarrow{z\to\infty} \infty,$$

y nuevamente

$$\int_1^y \exp\left(Cz^{\mathrm{d}} + Az^{b+1}\right) z^{-\mathrm{e}}\mathrm{d}z \xrightarrow{y\to\infty} \infty,$$

de donde se obtiene que

$$v(x) = \frac{2}{(1-\beta)^2}\int_1^x f(y)\mathrm{d}y,$$

donde $f(y)$ satisface

$$\lim_{y\to\infty} \frac{f(y)}{y^{-(\mathrm{d}-1)}} = \frac{1}{C\mathrm{d}} \in (0,\infty),$$

como en (3.44). Como en casos anteriores se llega a que

$$\lim_{x\to\infty} v(x) = \frac{2}{(1-\beta)^2}\int_1^\infty f(y)\mathrm{d}y \sim \int_1^\infty y^{-(\mathrm{d}-1)}\mathrm{d}y,$$

donde esta integral es finita si y solo si $\mathrm{d} > 2$ o equivalentemente $\delta > 1$, pero como θ, $K > 0$, para que σ_t sea **buena** es necesario que $\delta \leq 1$, luego en este caso la integral es siempre finita y $X_{t\wedge T_0}$ es siempre una martingala.

Para terminar con la demostración del teorema, basta atacar el caso $\theta < 0$, o bien $\delta < 2\beta - 1$, donde gracias al teorema 2.6 se tiene que toda solución σ_t es **buena**. Además, gracias a (3.38) se tiene que

$$\begin{aligned} v(x) &= \\ &\frac{2}{(1-\beta)^2}\int_1^x \exp\left(\frac{2K}{-\theta y^{\frac{-\theta}{1-\beta}}} - \frac{2\rho y^{\frac{\alpha}{1-\beta}+1}}{\alpha+1-\beta}\right) y^{\frac{\beta}{1-\beta}} \int_1^y \exp\left(\frac{2K}{\theta z^{\frac{-\theta}{1-\beta}}} + \frac{2\rho z^{\frac{\alpha}{1-\beta}+1}}{\alpha+1-\beta}\right) z^{\frac{-\beta}{1-\beta}}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{(1-\beta)^2}\int_1^x \exp\left(\frac{C}{y^{\mathrm{d}}} - Ay^{b+1}\right) y^{\mathrm{e}} \int_1^y \exp\left(\frac{-C}{z^{\mathrm{d}}} + Az^{b+1}\right) z^{-\mathrm{e}}\mathrm{d}z\mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{3.47}$$

donde

$$C = \frac{2K}{-\theta}\ ;\ A = \frac{2\rho}{\alpha+1-\beta}\ ;\ \mathrm{d} = \frac{-\theta}{1-\beta} > 0\ ;$$
$$b = \frac{\alpha}{1-\beta} > 0\ ;\ \mathrm{e} = \frac{\beta}{1-\beta} > 0.$$

Comenzando con el caso $\rho < 0$, y por ende $K > 0$, se tiene entonces que $C > 0$, $A < 0$ y se puede acotar

$$\begin{aligned}
(3.47) &\geq \frac{2}{(1-\beta)^2} \int_1^x 1 \cdot \exp\left(-Ay^{b+1}\right) y^{\mathrm{e}} \int_1^y \exp(-C) \exp\left(Az^{b+1}\right) z^{-\mathrm{e}} \mathrm{d}z \mathrm{d}y \\
&\geq \frac{2\exp(-C)}{(1-\beta)^2} \int_1^x \exp\left(-Ay^{b+1}\right) \exp\left(Ay^{b+1}\right) y^{\mathrm{e}} \int_1^y z^{-\mathrm{e}} \mathrm{d}z \mathrm{d}y \\
&= \frac{2\exp(-C)}{(1-\beta)^2} \int_1^x y^{\mathrm{e}} \int_1^y z^{-\mathrm{e}} \mathrm{d}z \mathrm{d}y \xrightarrow{x\to\infty} \infty,
\end{aligned}$$

gracias a lo hecho en (3.40). Esta cota entrega que en este caso $X_{t\wedge T_0}$ es siempre una martingala. El caso $\rho = 0$ se soluciona de manera similar notando que denuevo $K > 0$, y por ende $A = 0$ y $C > 0$, de donde se obtiene que

$$\begin{aligned}
(3.47) &= \frac{2}{(1-\beta)^2} \int_1^x \exp\left(\frac{C}{y^{\mathrm{d}}}\right) y^{\mathrm{e}} \int_1^y \exp\left(\frac{-C}{z^{\mathrm{d}}}\right) z^{-\mathrm{e}} \mathrm{d}z \mathrm{d}y \\
&\geq \frac{2}{(1-\beta)^2} \int_1^x 1 \cdot y^{\mathrm{e}} \int_1^y \exp\left(-C\right) z^{-\mathrm{e}} \mathrm{d}z \mathrm{d}y \\
&= \frac{2\exp\left(-C\right)}{(1-\beta)^2} \int_1^x y^{\mathrm{e}} \int_1^y z^{-\mathrm{e}} \mathrm{d}z \mathrm{d}y \xrightarrow{x\to\infty} \infty,
\end{aligned}$$

de donde se llega a la misma conclusión que en el caso anterior; $X_{t\wedge T_0}$ es siempre una martingala en este caso.

Por último, si $\rho > 0$ y sin importar el signo de K, se puede ver que, como $A > 0$

$$\exp\left(\frac{-C}{z^{\mathrm{d}}} + Az^{b+1}\right) = \exp\left(z^{b+1}\left(\frac{-C}{z^{\mathrm{d}+b+1}} + A\right)\right) \xrightarrow{z\to\infty} \infty,$$

y por ende al mismo tiempo se tiene

$$\int_1^y \exp\left(\frac{-C}{z^{\mathrm{d}}} + Az^{b+1}\right) z^{-\mathrm{e}} \mathrm{d}z \xrightarrow{y\to\infty} \infty,$$

Así, al notar que

$$v(x) = \frac{2}{(1-\beta)^2} \int_1^y f(y) \mathrm{d}y,$$

donde $f(y)$ satisface

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to\infty} \frac{f(y)}{y^{-b}} &= \lim_{y\to\infty} \frac{\int_1^y \exp\left(\frac{-C}{z^{\mathrm{d}}} + Az^{b+1}\right) z^{-\mathrm{e}}}{\exp\left(\frac{-C}{y^{\mathrm{d}}} + Ay^{b+1}\right) y^{-\mathrm{e}-b}} \\
&= \lim_{y\to\infty} \frac{\exp\left(\frac{-C}{y^{\mathrm{d}}} + Ay^{b+1}\right) y^{-\mathrm{e}}}{\exp\left(\frac{-C}{y^{\mathrm{d}}} + Ay^{b+1}\right) \left(-C(-\mathrm{d})y^{-\mathrm{e}-b-\mathrm{d}-1} + A(b+1)y^{-\mathrm{e}} - (\mathrm{e}+b)y^{-\mathrm{e}-b-1}\right)} \\
&= \lim_{y\to\infty} \frac{1}{-C(-\mathrm{d})y^{-b-\mathrm{d}-1} + A(b+1) - (\mathrm{e}+b)y^{-b-1}} = \frac{1}{A(b+1)} \in (0,\infty),
\end{aligned}$$

se concluye entonces que

$$\lim_{x\to\infty} v(x) = \frac{2}{(1-\beta)^2}\int_1^\infty f(y)\mathrm{d}y \sim \int_1^\infty y^{-b}\mathrm{d}y,$$

de donde nuevamente nace la condición de que $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala local estricta si y solo si $\alpha+\beta>1$, que es la condición 1 del teorema. En cualqueir otro caso $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala, y esto da fin a la demostración.

$\square$

3.2. El Caso Crítico: $\beta = 1$

Habiendo demostrado este teorema, y siguiendo con el objetivo de caracterizar completamente el comportamiento de la solución de (3.1), se enuncia el siguiente resultado análogo al anterior.

Teorema 3.6 *Se considera el sistema*

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = X_t\sigma_t^\alpha \mathrm{d}W_t\ , \quad X_0 = x_0 > 0, \\ \mathrm{d}\sigma_t = \sigma_t \mathrm{d}B_t + K\sigma_t^\delta \mathrm{d}t\ , \quad \sigma_0 > 0, \end{cases}$$

donde $\delta\in\mathbb{R}$ y $\alpha>0$. Más aun, se supone que la solución σ_t es ***buena****. Se supone además que $K>0$ o bien $\rho>0$ (el caso $K<0$ y $\rho\leq 0$ queda dentro del teorema 3.3). Luego, si $\rho>0$ y sucede cualquiera de los siguientes casos no intersectantes*

1. *$\delta < 1+\alpha$.*
2. *$\delta = \alpha+1$, $K\in(-\rho,0)$.*

entonces $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala local estricta. Por otra parte, si $\rho>0$ y no se cumple 1 o 2; o si $\rho\leq 0$, entonces $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala.

Demostración. La demostración de este teorema sigue la misma forma que la anterior. Se recuerda que se quiere caracterizar, en el caso $\beta=\gamma=1$, cuando la solución débil de la ecuación (3.30) explota hacia infinito en tiempo finito con probabilidad positiva. Para comenzar, se hace el cambio de variable propuesto en (3.32) y, a través de la regla de cálculo de Itô en forma diferencial aplicada a la función $f(\xi)=\log(\xi)$, se tiene que el nuevo proceso $z_t=\log(y_t)$ cumple

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}z_t = \mathrm{d}f(y_t) &= f'(y_t)\mathrm{d}y_t + \frac{1}{2}f''(y_t)\mathrm{d}\langle y\rangle_t \\
&= \frac{1}{y_t}\mathrm{d}y_t - \frac{1}{y_t^2}\mathrm{d}\langle y\rangle_t \\
&= \alpha\mathrm{d}\tilde{B}_t + \left\{K\alpha y_t^{\frac{\delta-1}{\alpha}} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} + \rho\alpha y_t - \frac{\alpha^2}{2}\right\}\mathrm{d}t \\
&= \alpha\mathrm{d}\tilde{B}_t + \left\{K\alpha\exp\left(z_t\frac{\delta-1}{\alpha}\right) + \rho\alpha\exp(z_t) - \frac{\alpha}{2}\right\}\mathrm{d}t \\
&= \alpha\mathrm{d}\tilde{B}_t + b(z_t)\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

donde nuevamente se entiende que esta ecuación es válida en el intervalo de interés $t < T_0 \wedge T_\infty^y$.

Por otra parte, se tiene directamente que

$$y_t \to \infty \Longleftrightarrow z_t = log(y_t) \to \infty$$

lo que implica que se recupera la misma condición que en el teorema anterior: el tiempo de explosión de z_t a infinito es el mismo que el tiempo a explosión a infinito de y_t. Con esto, basta estudiar cuando el tiempo de explosión a infinito de z_t, o T_∞^z, es finito con probabilidad positiva. Gracias al test de explosión de Feller, se tiene que

$$\mathbb{P}(T_\infty^z = \infty) = 1 \Longleftrightarrow \lim_{x\to\infty} v(x) = \infty,$$

donde ahora

$$\begin{aligned} &v(x) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, \\ &v(x) = \int_1^x p'(y) \int_1^y \frac{2}{p'(z)\alpha^2} \mathrm{d}z\mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{3.48}$$

y

$$\begin{aligned} &p(x) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \\ &p(x) = \int_1^x \exp\left\{-2\int_1^y \frac{b(\xi)}{\alpha^2}\mathrm{d}\xi\right\} \mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Con esto, se procede a calcular entonces

$$\begin{aligned} \frac{-2}{\alpha^2}\int_1^y b(\xi)\mathrm{d}\xi &= \frac{-2}{\alpha^2}\int_1^y \left\{K\alpha\exp\left(\xi\frac{\delta-1}{\alpha}\right) + \rho\alpha\exp(\xi) - \frac{\alpha}{2}\right\}\mathrm{d}\xi \\ &= \begin{cases} \frac{-2}{\alpha}\left\{\left(K-\frac{1}{2}\right)(y-1) + \rho\exp(y) - \rho\exp(1)\right\} & \text{si } \delta = 1, \\ \frac{-2}{\alpha}\left\{\frac{1-y}{2} + \rho\left(\exp(y) - \exp(1)\right) + \frac{K\alpha}{\delta-1}\left(\exp\left(y\frac{\delta-1}{\alpha}\right) - \exp\left(\frac{\delta-1}{\alpha}\right)\right)\right\} & \text{si } \delta \neq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

de donde, siguiendo (3.49)

$$\begin{aligned} p'(x) &= \begin{cases} \exp\left\{(x-1)\left(\frac{1-2K}{\alpha}\right) - \frac{2\rho}{\alpha}\left(\exp(x) - \exp(1)\right)\right\} & \text{si } \delta = 1 \\ \exp\left\{\frac{x-1}{\alpha} - \frac{2\rho}{\alpha}\left(\exp(x) - \exp(1)\right) - \frac{2K}{\delta-1}\left(\exp\left(x\frac{\delta-1}{\alpha}\right) - \exp\left(\frac{\delta-1}{\alpha}\right)\right)\right\} & \text{si } \delta \neq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \exp\left\{x\left(\frac{1-2K}{\alpha}\right) - \frac{2\rho}{\alpha}\exp(x)\right\}\cdot C_0 & \text{si } \delta = 1, \\ \exp\left\{\frac{x}{\alpha} - \frac{2\rho}{\alpha}\exp(x) - \frac{2K}{\delta-1}\exp\left(x\frac{\delta-1}{\alpha}\right)\right\}\cdot C_1 & \text{si } \delta \neq 1, \end{cases} \end{aligned} \tag{3.50}$$

Se comienza entonces el análisis con el caso $\delta = 1$. Lo primero que hay que notar es que, como $\beta = 1$, luego $\theta = 0$ y entonces, gracias al teorema 2.6, se tiene que la solución σ_t es **buena** en todos los casos. Además, gracias a (3.49) y (3.50), se tiene que

$$\begin{aligned} &v(x) = \\ &\frac{2}{\alpha^2}\int_1^x \exp\left(y\left(\frac{1-2K}{\alpha}\right) - \frac{2\rho}{\alpha}\exp(y)\right)\int_1^y \exp\left(-z\left(\frac{1-2K}{\alpha}\right) + \frac{2\rho}{\alpha}\exp(z)\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\ &\qquad = \frac{2}{\alpha^2}\int_1^x \exp\left(Ay - B\exp(y)\right)\int_1^y \exp\left(-Az + B\exp(z)\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{3.51}$$

donde

$$A = \frac{1-2K}{\alpha} \; ; \; B = \frac{2\rho}{\alpha}.$$

Ahora, si $\rho < 0$, luego $B < 0$ y

$$\exp\left(-Az + B\exp(z)\right) \xrightarrow{z\to\infty} 0,$$

y este límite es monótono desde un momento $z_0 > 1$. Así, se observa que para $x > z_0$ suficientemente grande

$$\begin{aligned} v(x) &\geq \frac{2}{\alpha^2}\int_{z_0}^{x} \exp\left(Ay - B\exp(y)\right)\exp\left(-Ay + B\exp(y)\right)\int_{z_0}^{y} \mathrm{d}z\mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{\alpha^2}\int_{z_0}^{x}\int_{z_0}^{y} \mathrm{d}z\mathrm{d}y \xrightarrow{x\to\infty} \infty, \end{aligned}$$

y se concluye que $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala en este caso.

Continuando, si $\rho = 0$ y $K \neq 1/2$, luego $B = 0$, $A \neq 0$ y entonces

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{2}{\alpha^2}\int_{1}^{x} \exp\left(Ay\right)\int_{1}^{y} \exp\left(-Az\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{\alpha^2}\int_{1}^{x} \exp\left(Ay\right)\left\{\frac{\exp\left(-A\right)}{A} - \frac{\exp\left(-Ay\right)}{A}\right\}\mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{\alpha^2}\left\{\frac{1-x}{A} + \frac{\exp(Ax)\exp(-A) - 1}{A^2}\right\}. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Así, si $A < 0$, o $K > 1/2$

$$(3.52) = \frac{2}{\alpha^2}\cdot x\left\{\frac{1}{-A} + \frac{1}{Ax} + \frac{\exp(Ax)\exp(-A)}{A^2x} - \frac{1}{A^2x}\right\} \xrightarrow{x\to\infty} \infty,$$

mientras que si $A > 0$, o $K < 1/2$

$$(3.52) = \frac{2}{\alpha^2}\cdot\exp(Ax)\left\{\frac{1}{A\exp(Ax)} - \frac{x}{A\exp(Ax)} + \frac{\exp(-A)}{A^2} - \frac{1}{A^2\exp(Ax)}\right\} \xrightarrow{x\to\infty} \infty.$$

Por otro lado, si B, $A = 0$, es decir $\rho = 0$ y $K = 1/2$, entonces se tiene que

$$(3.51) = \frac{2}{\alpha^2}\int_{1}^{x}\int_{1}^{y} \mathrm{d}z\mathrm{d}y \xrightarrow{x\to\infty} \infty,$$

directamente. Así, se concluye que si $\rho = 0$, entonces $X_{t\wedge T_0}$ siempre es una martingala.

Por último, si $\rho > 0$, entonces $B > 0$ y se observa que

$$\exp\left(-Az + B\exp(z)\right) \xrightarrow{z\to\infty} \infty,$$

luego

$$(3.51) = \frac{2}{\alpha^2}\int_1^x f(y)\mathrm{d}y,$$

donde $f(y)$ satisface, usando la regla de L'Hôpital,

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to\infty}\frac{f(y)}{\exp(-y)} &= \lim_{y\to\infty}\frac{\int_1^y \exp\left(-Az+B\exp(z)\right)\mathrm{d}y}{\exp\left(-Ay+B\exp(y)\right)\exp(-y)}\\
&= \lim_{y\to\infty}\frac{\exp\left(-Ay+B\exp(y)\right)}{\exp\left(-Ay+B\exp(y)\right)\exp(-y)\left\{-A+B\exp(y)-1\right\}}\\
&= \lim_{y\to\infty}\frac{1}{-A\exp(-y)+B-\exp(-y)} = \frac{1}{B}\in(0,\infty).
\end{aligned}$$

De esto se obtiene que

$$\lim_{x\to\infty} v(x) = \frac{2}{\alpha^2}\int_1^\infty f(y)\mathrm{d}y \sim \int_1^\infty \exp(-y)\mathrm{d}y < \infty,$$

y luego en esta situación, que queda incluida en el caso uno del enunciado del teorema, $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala local estricta.

Dando por terminado el caso $\delta = 1$, se procede a atacar el caso $\delta \neq 1$. En este caso, recordando (3.50), se tiene que

$$\begin{aligned}
v(x) = \frac{2}{\alpha^2}\int_1^x &\exp\left\{\frac{y}{\alpha}-\frac{2\rho}{\alpha}\exp(y)-\frac{2K}{\delta-1}\exp\left(y\frac{\delta-1}{\alpha}\right)\right\}\dots\\
&\dots\int_1^y \exp\left\{-\frac{z}{\alpha}+\frac{2\rho}{\alpha}\exp(z)+\frac{2K}{\delta-1}\exp\left(z\frac{\delta-1}{\alpha}\right)\right\}\mathrm{d}z\mathrm{d}y\\
= \frac{2}{\alpha^2}\int_1^x &\exp\left(Ay-B\exp(y)-C\exp(Dy)\right)\int_1^y \exp\left(-Az+B\exp(z)+C\exp(Dz)\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y,
\end{aligned} \tag{3.53}$$

donde B es la misma constante que en el caso anterior, mientras que

$$A = \frac{1}{\alpha}\ ;\ C = \frac{2K}{\delta-1}\ ;\ D = \frac{\delta-1}{\alpha}.$$

Luego, al estudiar el caso $\delta < 1$ se ve que $\theta < 0$ (pues $\beta = 1$), luego gracias al teorema 2.6 se tiene que la solución σ_t es siempre **buena**. Por otra parte se nota que si $K > 0$, entonces como $\delta - 1 < 0$

$$\begin{aligned}
\exp\left(C\exp(Dy)\right) &\in \left[\exp\left(C\exp(D)\right),1\right] \text{ si } y\geq 1,\\
\exp\left(-C\exp(Dy)\right) &\in \left[1,\exp\left(-C\exp(D)\right)\right] \text{ si } y\geq 1,
\end{aligned}$$

mientras que si $K < 0$ entonces

$$\begin{aligned}
\exp\left(C\exp(Dy)\right) &\in \left[1,\exp\left(C\exp(D)\right)\right] \text{ si } y\geq 1,\\
\exp\left(-C\exp(Dy)\right) &\in \left[\exp\left(-C\exp(D)\right),1\right] \text{ si } y\geq 1,
\end{aligned}$$

Con estas cotas, independiente del signo de K, se tienen las siguientes cotas

$$v(x) \leq \frac{2\exp(|C|\exp(D))}{\alpha^2}\int_1^x \exp\left(Ay - B\exp(y)\right)\int_1^y \exp\left(-Az + B\exp(z)\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y,$$
$$v(x) \geq \frac{2\exp(-|C|\exp(D))}{\alpha^2}\int_1^x \exp\left(Ay - B\exp(y)\right)\int_1^y \exp\left(-Az + B\exp(z)\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y,$$

de donde se obtiene que el comportamiento de $v(x)$ cuando x va a infinito es el mismo que el encontrado en el caso anterior. Luego se concluye que si $\rho \leq 0$ entonces $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala, mientras que si $\rho > 0$, $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala local estricta; situación que queda incluida en el caso primer caso del teorema. Vale mencionar que en el caso $K < 0$ y $\rho < 0$, se recuperan los resultados sobre el comportamiento de $X_{t\wedge T_0}$ encontrados en el teorema 3.3.

Para finalizar se debe abordar el caso $\delta > 1$, donde es importante notar que, como $\beta = 1$, entonces $\theta > 0$. Esto implica, gracias al teorema 2.6, que solamente interesan los sistemas donde $K < 0$, para que la solución σ_t sea **buena**; lo que fuerza también a mirar solamente situaciones donde $\rho > 0$, dadas las condiciones sobre K y ρ en las hipótesis del teorema. Esto fuerza entonces a que $C < 0$, B, $A > 0$ También es importante distinguir entre tres casos en este análisis, que tienen que ver con cómo se comparan δ y $\alpha + 1$.

Se estudia primero lo que pasa cuando $\delta > \alpha + 1$, es decir, $D > 1$. Aquí se ve que

$$\begin{aligned}-Az + B\exp(z) + C\exp(Dz) &= \exp(Dz)\left\{-\frac{Az}{\exp(Dz)} + B\exp((1-D)z) + C\right\}\\ &\xrightarrow{z\to\infty} -\infty,\end{aligned}$$

de donde

$$\exp\left(-Az + B\exp(z) + C\exp(Dz)\right) \xrightarrow{z\to\infty} 0,$$

y el límite es monótono desde un punto $z_0 > 1$. Así, se concluye de (3.53) que para $x > z_0$

$$\begin{aligned}&v(x) \geq \\ &\quad \frac{2}{\alpha^2}\int_{z_0}^x \exp\left(Ay - B\exp(y) - C\exp(Dy)\right)\exp\left(-Ay + B\exp(y) + C\exp(Dy)\right)\int_{z_0}^y \mathrm{d}z\mathrm{d}y\\ &\quad = \frac{2}{\alpha^2}\int_{z_0}^x\int_{z_0}^y \mathrm{d}z\mathrm{d}y \xrightarrow{x\to\infty} \infty,\end{aligned}$$

y entonces $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala en este caso.

Pasando ahora a cuando $\delta = \alpha + 1$, ó $D = 1$, se ve de (3.53) que se tiene

$$v(x) = \frac{2}{\alpha^2}\int_1^x \exp\left(Ay - (B+C)\exp(y)\right)\int_1^y \exp\left(-Az + (B+C)\exp(z)\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y, \qquad (3.54)$$

y nuevamente hay que distinguir 3 situaciones distintas dependiendo de cómo se comparan B y C, o equivalentemente, gracias a que $\delta = \alpha + 1$, cómo se comparan K y ρ. Recordando que $K<0$ y $\rho>0$, se comienza primero con el caso $K\in(-\rho,0)$. Aquí $B+C>0$ y luego se tiene que

$$\exp\left(-Az+(B+C)\exp(z)\right)\xrightarrow{z\to\infty}\infty,$$

y por ende

$$\int_1^y \exp\left(-Az+(B+C)\exp(z)\right)\mathrm{d}z\xrightarrow{y\to\infty}\infty.$$

Así, se cumple que

$$v(x)=\frac{2}{\alpha^2}\int_1^x f(y)\mathrm{d}y,$$

donde $f(y)$ satisface

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to\infty}\frac{f(y)}{\exp(-y)}&=\lim_{y\to\infty}\frac{\int_1^y\exp\left(-Az+(B+C)\exp(z)\right)\mathrm{d}z}{\exp\left(-Ay+(B+C)\exp(y)\right)\exp(-y)}\\
&=\lim_{y\to\infty}\frac{\exp\left(-Ay+(B+C)\exp(y)\right)}{\exp\left(-Ay+(B+C)\exp(y)\right)\exp(-y)\left\{-1-A+(B+C)\exp(y)\right\}}\\
&=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{-(1+A)\exp(-y)+B+C}=\frac{1}{B+C}\in(0,\infty),
\end{aligned}$$

luego se concluye

$$\lim_{x\to\infty}v(x)=\frac{2}{\alpha^2}\int_1^\infty f(y)\mathrm{d}y\sim\frac{2}{\alpha^2}\int_1^\infty\exp(-y)\mathrm{d}y<\infty,$$

y así $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala local estricta, como se pide en el segundo caso del enunciado.

Para continuar, el caso $K=-\rho$ implica de (3.54) que

$$\begin{aligned}
v(x)&=\frac{2}{\alpha^2}\int_1^x\exp\left(Ay\right)\int_1^y\exp\left(-Az\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\\
&\geq\frac{2}{\alpha^2}\int_1^x\exp\left(Ay\right)\exp\left(-Ay\right)\int_1^y\mathrm{d}z\mathrm{d}y\\
&=\frac{2}{\alpha^2}\int_1^x\int_1^y\mathrm{d}z\mathrm{d}y\xrightarrow{x\to\infty}\infty,
\end{aligned}$$

gracias a que $A>0$. Así, $X_{t\wedge T_0}$ es martingala en este caso. Por último cuando $K<-\rho$, entonces $(B+C)<0$ y luego

$$\exp\left(-Az+(B+C)\exp(z)\right)\xrightarrow{z\to\infty}0,$$

y lo hace de manera decreciente desde 1. Con esto se tiene que

$$\begin{aligned}
(3.54)&\geq\frac{2}{\alpha^2}\int_1^x\exp\left(Ay-(B+C)\exp(y)\right)\exp\left(-Ay+(B+C)\exp(y)\right)\int_1^y\mathrm{d}z\mathrm{d}y\\
&=\frac{2}{\alpha^2}\int_1^x\int_1^y\mathrm{d}z\mathrm{d}y\xrightarrow{x\to\infty}\infty,
\end{aligned}$$

y se concluye que $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala en este caso.

Por último, si $\delta \in (1, 1+\alpha)$, luego $D \in (0,1)$, lo que implica que

$$\exp\left(-Az + B\exp(z) + C\exp(Dz)\right) \xrightarrow{z\to\infty} \infty,$$

recordando que $B > 0$. Esto además entrega que

$$\int_1^y \exp\left(-Az + B\exp(z) + C\exp(Dz)\right)\mathrm{d}y \xrightarrow{y\to\infty} \infty,$$

luego $v(x)$ cumple que

$$v(x) = \frac{2}{\alpha^2}\int_1^y f(y)\mathrm{d}y,$$

donde $f(y)$ satisface

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to\infty}\frac{f(y)}{\exp(-y)} = \lim_{y\to\infty}\frac{\int_1^y \exp\left(-Az + B\exp(z) + C\exp(Dz)\right)\mathrm{d}z}{\exp\left(-Ay + B\exp(y) + C\exp(Dy)\right)\exp(-y)}\\
&= \lim_{y\to\infty}\frac{\exp\left(-Ay + B\exp(y) + C\exp(Dy)\right)}{\exp\left(-Ay + B\exp(y) + C\exp(Dy)\right)\exp(-y)\left\{-1 - A + B\exp(y) + CD\exp(Dy)\right\}}\\
&= \lim_{y\to\infty}\frac{1}{\left\{-(1+A)\exp(-y) + B + CD\exp((D-1)y)\right\}} = \frac{1}{B} \in (0,\infty),
\end{aligned}$$

y así nuevamente se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} v(x) = \frac{2}{\alpha^2}\int_1^\infty f(y)\mathrm{d}y \sim \frac{2}{\alpha^2}\int_1^\infty \exp(-y)\mathrm{d}y < \infty,$$

y $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala local estricta, lo que equivale a la primera condición del teorema. Así, se ha caracterizado el comportamiento para el caso $\delta \neq 1$, lo que completa la demostración. $\square$

Observación Vale la pena mencionar que si se comparan las condiciones desfavorables (las que hacen a $X_{t\wedge T_0}$ una martingala local estricta) de los teoremas anteriores, se ve que si se reemplaza $\beta = 1$ en las condiciones del teorema 3.5, se recuperan las condiciones encontradas en el teorema 3.6, lo que lleva a concluir que el comportamiento del caso $\beta < 1$ no es muy distinto al caso $\beta = 1$, resultados que se observan también en el teorema 9 de [5].

3.3. El Caso Supercrítico: $\beta > 1$

Finalmente, para completar el análisis de la ecuación (3.1) queda estudiar lo que sucede cuando $\beta > 1$, situación que queda caracterizada en el siguiente resultado, el último de este trabajo.

Teorema 3.7 *Se considera el sistema*

$$\begin{cases}\mathrm{d}X_t = X_t\sigma_t^\alpha \mathrm{d}W_t\ , \quad X_0 = x_0 > 0,\\ \mathrm{d}\sigma_t = \sigma_t^\beta \mathrm{d}B_t + K\sigma_t^\delta \mathrm{d}t\ , \quad \sigma_0 > 0,\end{cases}$$

donde $\delta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ y $\beta > 1$. Más aun, se supone que la solución σ_t es ***buena****. Se supone además que $K > 0$ o bien $\rho > 0$ (el caso $K < 0$ y $\rho \leq 0$ queda dentro del teorema 3.3). Luego, si $\rho > 0$ y sucede cualquiera de los siguientes casos no intersectantes*

1. $\delta < 2\beta - 1$, $\alpha = \beta - 1$, $\rho > \frac{1}{2}$.
2. $\delta < 2\beta - 1$, $\alpha > \beta - 1$.
3. $\delta = 2\beta - 1$, $\alpha = \beta - 1$, $K + \rho > \frac{1}{2}$.
4. $\delta = 2\beta - 1$, $\alpha > \beta - 1$.
5. $\delta > 2\beta - 1$, $\alpha > \beta - 1$, $\delta < \alpha + \beta$.
6. $\delta > 2\beta - 1$, $\alpha > \beta - 1$, $\delta = \alpha + \beta$, $K \in (-\rho, 0)$.

entonces $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala local estricta. Por otra parte, si $\rho > 0$ y no se cumple 1, 2, 3, 4, 5 o 6; o si $\rho \leq 0$, $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala.

Demostración. Siguiendo el modelo de los teoremas anteriores, y como $\beta > 1$ y por ende $\gamma > 1$, se aplica el cambio de variable (3.31) en la ecuación (3.30) para obtener, como en (3.33) y (3.34), que z_t se rige, dentro del intervalo de interés $t < T_\infty^y \wedge T_0$, por la ecuación

$$\begin{aligned} \mathrm{d}z_t &= -(\beta-1)\mathrm{d}\tilde{B}_t + \left\{ -K(\beta-1)z_t^{\frac{\beta-\delta}{\beta-1}} - \rho(\beta-1)z_t^{\frac{-\alpha}{\beta-1}} + \frac{\beta(\beta-1)}{2}z_t^{-1} \right\} \mathrm{d}t \\ &= -(\beta-1)\mathrm{d}\tilde{B}_t + b(z_t)\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

donde

$$b(\xi) = -K(\beta-1)\xi^{\frac{\beta-\delta}{\beta-1}} - \rho(\beta-1)\xi^{\frac{-\alpha}{\beta-1}} + \frac{\beta(\beta-1)}{2}\xi^{-1}. \tag{3.55}$$

Por otra parte, como $\gamma > 1$, luego

$$y_t \to \infty \iff z_t = y_t^{1-\gamma} \to 0,$$

lo que implica que para estudiar cuándo el tiempo de explosión a infinito de y_t tiene probabilidad positiva de ser finito, hay que estudiar cuando el tiempo de explosión a cero de z_t, desde ahora T_0^z, tiene probabilidad positiva de ser finito. Además, gracias nuevamente al test de explosión de Feller, se tiene que

$$\mathbb{P}(T_0^z = \infty) = 1 \iff \lim_{x\to 0^+} v(x) = \infty,$$

donde en este caso

$$\begin{aligned} &v(x) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, \\ &v(x) = \int_x^1 p'(y) \int_y^1 \frac{2}{p'(z)(\beta-1)^2} \mathrm{d}z\mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{3.56}$$

y

$$\begin{aligned} &p(x) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \\ &p(x) = \int_1^x \exp\left\{ -2\int_1^y \frac{b(\xi)}{(\beta-1)^2}\mathrm{d}\xi \right\} \mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Para comenzar el análisis, se debe calcular

$$\frac{-2}{(\beta-1)^2}\int_1^y b(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{-2}{(\beta-1)^2}\int_1^y \left\{-K(\beta-1)\xi^{\frac{\beta-\delta}{\beta-1}} - \rho(\beta-1)\xi^{\frac{-\alpha}{\beta-1}} + \frac{\beta(\beta-1)}{2}\xi^{-1}\right\}\mathrm{d}\xi$$

$$= \begin{cases} \frac{-2}{(\beta-1)^2}\left[\frac{\beta(\beta-1)}{2}\ln(y) - K(\beta-1)\ln(y) - \rho(\beta-1)\ln(y)\right] & \text{si } \theta=0,\ \alpha=\beta-1, \\ \frac{-2}{(\beta-1)^2}\left[\frac{\beta(\beta-1)}{2}\ln(y) - K(\beta-1)\ln(y) - \frac{\rho(\beta-1)^2}{\beta-1-\alpha}\left(y^{\frac{\beta-1-\alpha}{\beta-1}}-1\right)\right] & \text{si } \theta=0,\ \alpha\neq\beta-1, \\ \frac{-2}{(\beta-1)^2}\left[\frac{\beta(\beta-1)}{2}\ln(y) - \rho(\beta-1)\ln(y) + \frac{K(\beta-1)^2}{\theta}\left(y^{\frac{-\theta}{\beta-1}}-1\right)\right] & \text{si } \theta\neq 0,\ \alpha=\beta-1, \\ \frac{-2}{(\beta-1)^2}\left[\frac{\beta(\beta-1)}{2}\ln(y) + \frac{K(\beta-1)^2}{\theta}\left(y^{\frac{-\theta}{\beta-1}}-1\right) - \frac{\rho(\beta-1)^2}{\beta-1-\alpha}\left(y^{\frac{\beta-1-\alpha}{\beta-1}}-1\right)\right] & \text{si } \theta\neq 0,\ \alpha\neq\beta-1, \end{cases}$$

de donde

$$p'(x) = \begin{cases} x^{\frac{2K+2\rho-\beta}{\beta-1}} & \text{si } \theta=0\ ,\ \alpha=\beta-1, \\ x^{\frac{2K-\beta}{\beta-1}}\exp\left\{\frac{2\rho}{\beta-1-\alpha}x^{\frac{\beta-1-\alpha}{\beta-1}}\right\}\exp\left\{\frac{-2\rho}{\beta-1-\alpha}\right\} & \text{si } \theta=0\ ,\ \alpha\neq\beta-1, \\ x^{\frac{2\rho-\beta}{\beta-1}}\exp\left\{\frac{-2K}{\theta}x^{\frac{-\theta}{\beta-1}}\right\}\exp\left\{\frac{2K}{\theta}\right\} & \text{si } \theta\neq 0\ ,\ \alpha=\beta-1, \\ x^{\frac{-\beta}{\beta-1}}\exp\left\{\frac{2\rho}{\beta-1-\alpha}x^{\frac{\beta-1-\alpha}{\beta-1}} - \frac{2K}{\theta}x^{\frac{-\theta}{\beta-1}}\right\}\exp\left\{\frac{2K}{\theta}-\frac{2\rho}{\beta-1-\alpha}\right\} & \text{si } \theta\neq 0\ ,\ \alpha\neq\beta-1, \end{cases} \tag{3.58}$$

donde se reconocen 4 casos distintos a estudiar, dependiendo si se tienen o no las siguientes igualdades

$$\frac{-\alpha}{\beta-1} = -1 \Leftrightarrow \alpha=\beta-1,$$
$$\frac{\beta-\delta}{\beta-1} = -1 \Leftrightarrow \theta=0.$$

Se empieza el estudio con el caso más simple: $\theta=0$ y $\alpha=\beta-1$. Primero hay que notar que como $\theta=0$ y $\beta>1$, el teorema 2.6 fuerza a solamente mirar los casos donde $K\leq\frac{1}{2}$. Por otra parte se tiene que

$$(3.56) = \frac{2}{(\beta-1)^2}\int_x^1 y^\tau \int_y^1 z^{-\tau}\mathrm{d}z\mathrm{d}y, \tag{3.59}$$

donde

$$\tau = \frac{2K+2\rho-\beta}{\beta-1},$$

y se pueden distinguir 3 situaciones diferentes, dependiendo del signo de τ. Para obtener mayor generalidad, necesaria más adelante, se estudia para $z_0\in(0,1]$ la convergencia de la integral

$$\frac{2}{(\beta-1)^2}\int_x^{z_0} y^\tau \int_y^{z_0} z^{-\tau}\mathrm{d}z\mathrm{d}y, \tag{3.60}$$

también dependiendo del signo de τ.

1. $K+\rho > \frac{\beta}{2}$: Si esto ocurre entonces $\tau > 0$ y se tiene directamente que

$$(3.60) \leq \frac{2}{(\beta-1)^2} \int_x^1 y^\tau y^{-\tau} \int_y^1 \mathrm{d}z\mathrm{d}y \leq \frac{2}{(\beta-1)^2} < \infty,$$

de donde, para el caso a estudiar, tomando $z_0 = 1$

$$\lim_{x \to 0^+} v(x) < \infty,$$

y $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala local estricta.

2. $K+\rho = \frac{\beta}{2}$: Ahora se tiene que $\tau = 0$ y luego

$$(3.60) = \frac{2}{(\beta-1)^2} \int_x^{z_0} \int_y^{z_0} \mathrm{d}z\mathrm{d}y \leq \frac{2}{(\beta-1)^2} < \infty,$$

y nuevamente $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala local estricta tomando $z_0 = 1$.

3. $K+\rho < \frac{\beta}{2}$: Esto implica que $\tau < 0$, y entonces se obtiene

$$\begin{aligned}(3.60) &= \frac{2}{(\beta-1)^2} \int_x^{z_0} y^\tau \left\{ \frac{z_0^{-\tau+1}}{-\tau+1} - \frac{y^{-\tau+1}}{-\tau+1} \right\} \mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{(\beta-1)^2} \int_x^{z_0} \frac{y^\tau z_0^{-\tau+1}}{-\tau+1} - \frac{y}{-\tau+1} \mathrm{d}y,\end{aligned}$$

y así se concluye que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} (3.60) &= \frac{2}{(\beta-1)^2} \int_0^{z_0} \frac{z_0^{-\tau+1} y^\tau}{-\tau+1} - \frac{y}{-\tau+1} \mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{(\beta-1)^2(-\tau+1)} \left\{ z_0^{-\tau+1} \int_0^{z_0} y^\tau \mathrm{d}y - \frac{z_0^2}{2} \right\},\end{aligned}$$

donde este último término es finito si y solo si $\tau > -1$, o equivalentemente $K+\rho > \frac{1}{2}$. Esto implica entonces, tomando $z_0 = 1$, que para este caso $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala local estricta si $K+\rho \in (\frac{1}{2}, \frac{\beta}{2})$ y es una martingala en caso contrario.

Los resultados anteriores se pueden resumir en que si $\theta = 0$ y $\alpha = \beta - 1$, entonces $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala si y solo si $K+\rho \leq \frac{1}{2}$, lo que equivale al tercer caso del teorema. Es importante notar que si $\rho \leq 0$, gracias a la condición entregada por el teorema 2.6, se tiene que $K+\rho \leq K \leq \frac{1}{2}$, de donde se concluye que $X_{t\wedge T_0}$ es siempre martingala en este caso.

Continuando el análisis con cuando $\theta = 0$ y $\alpha \neq \beta - 1$, se tiene gracias a (3.58) que

$$(3.56) = \frac{2}{(\beta-1)^2} \int_x^1 y^a \exp\left\{Ay^b\right\} \int_y^1 z^{-a} \exp\left\{-Az^b\right\} \mathrm{d}z\mathrm{d}y, \tag{3.61}$$

donde

$$a = \frac{2K-\beta}{\beta-1} \; ; \; A = \frac{2\rho}{\beta-1-\alpha} \; ;$$
$$b = \frac{\beta-1-\alpha}{\beta-1}.$$

Además es importante notar que, gracias nuevamente al teorema 2.6, se tiene que, como $\theta = 0$ y $\beta > 1$, solamente se deben tratar los casos donde $K \leq \frac{1}{2}$, lo que implica ademas que

$$a = \frac{2K - \beta}{\beta - 1} \leq \frac{1 - \beta}{\beta - 1} = -1.$$

Ahora, partiendo por el caso $\rho = 0$, se obtiene que

$$(3.61) = \frac{2}{(\beta - 1)^2} \int_x^1 y^a \int_y^1 z^{-a} \mathrm{d}z \mathrm{d}y \xrightarrow{x \to 0^+} \infty,$$

gracias a que $a \leq -1$ y a lo estudiado sobre (3.60); de donde se concluye que $X_{t \wedge T_0}$ es una martingala en este caso. Por otra parte, si $\rho \neq 0$, el comportamiento de (3.61) va a depender del signo de b, o equivalentemente, de cómo se comparen α y $\beta - 1$.

Si $\beta - 1 > \alpha$, entonces $b > 0$ e independiente del signo de ρ se tiene que

$$\exp\left\{-Az^b\right\} \ , \ \exp\left\{Az^b\right\} \geq \exp\left\{-|A|\right\} \quad \forall z \in [0, 1],$$

de donde

$$(3.60) \geq \frac{2 \exp\left\{-2|A|\right\}}{(\beta - 1)^2} \int_x^1 y^a \int_y^1 z^{-a} \mathrm{d}z \mathrm{d}y \xrightarrow{x \to 0^+} \infty,$$

nuevamente gracias al análisis de (3.60) y a que $a \leq -1$. Por el contrario, si se considera ahora $\beta - 1 < \alpha$, o lo que es igual $b < 0$, se tiene entonces que el comportamiento de (3.61) depende del signo de ρ.

Si $\rho < 0$, entonces $A > 0$, y se tiene que

$$\exp\left\{-Az^b\right\} \xrightarrow{z \to 0^+} 0,$$

y esta convergencia es de manera monótona. Con esto se concluye que

$$\begin{aligned}
(3.61) &\geq \frac{2}{(\beta - 1)^2} \int_x^1 y^a \exp\left\{Ay^b\right\} \exp\left\{-Ay^b\right\} \int_y^1 z^{-a} \mathrm{d}z \mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{(\beta - 1)^2} \int_x^1 y^a \int_y^1 z^{-a} \mathrm{d}z \mathrm{d}y \xrightarrow{x \to 0^+} \infty,
\end{aligned}$$

como en los casos anteriores; lo que indica que aquí $X_{t \wedge T_0}$ es una martingala. Ahora bien, si $\rho > 0$, entonces $A < 0$, y luego se tiene que

$$(3.61) = \frac{2}{(\beta - 1)^2} \int_x^1 f(y) \mathrm{d}y,$$

donde $f(y)$ satisface, gracias a una aplicación de la regla de L'Hôpital, que

$$\begin{aligned}
\lim_{y \to 0^+} \frac{f(y)}{y^{-(b-1)}} &= \lim_{y \to 0^+} \frac{\int_y^1 z^{-a} \exp\left\{-Az^b\right\} \mathrm{d}z}{y^{-a-b+1} \exp\left\{-Ay^b\right\}} \\
&= \lim_{y \to 0^+} \frac{-y^{-a} \exp\left\{-Ay^b\right\}}{\exp\left\{-Ay^b\right\} (-Aby^{-a} + (1 - a - b)y^{-a-b})} \\
&= \lim_{y \to 0^+} \frac{-1}{-Ab + (1 - a - b)y^{-b}} = \frac{1}{Ab} \in (0, \infty).
\end{aligned}$$

Esto implica entonces que, para este caso

$$\lim_{x\to 0^+} v(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{(\beta-1)^2}\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y \sim \lim_{x\to 0^+}\int_x^1 y^{1-b}\mathrm{d}y < \infty,$$

pues $b < 0$. Así se concluye que $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala local estricta en este caso, que es el cuarto del enunciado del teorema.

Pasando ahora a la siguiente situación, si $\theta \neq 0$ y $\alpha = \beta - 1$, conviene nuevamente separar el análisis dependiendo del signo de θ. Se comienza estudiando qué pasa cuando $\theta > 0$. Lo primero que hay que notar es que, como $\beta > 1$ y $\delta - 2\beta + 1 > 0$, entonces en particular $\delta > 1$, lo que fuerza a considerar solamente los casos donde $K < 0$ debido al teorema 2.6 y esto implica además que solo se debe considerar $\rho > 0$, ya que el caso contrario se aborda en el teorema 3.3.

Recordando (3.58), se tiene que ahora

$$(3.56) = \frac{2}{(\beta-1)^2}\int_x^1 y^a \exp\left\{Ay^{-b}\right\}\int_y^1 z^{-a}\exp\left\{-Az^{-b}\right\}\mathrm{d}z\mathrm{d}y, \tag{3.62}$$

donde

$$A = \frac{-2K}{\theta}\ ;\ a = \frac{2\rho-\beta}{\beta-1}\ ;$$
$$b = \frac{\theta}{\beta-1}.$$

Luego, como A, $b > 0$, se tiene que

$$z^{-a}\exp\left\{-Az^{-b}\right\} \xrightarrow{z\to 0^+} 0,$$

y como la función es directamente continua fuera de 0, se tiene que es continua en todo el intervalo $[0,1]$; mientras que es evidentemente estrictamente positiva fuera de 0. Esto lleva a concluir que

$$\int_0^1 z^{-a}\exp\left\{-Az^{-b}\right\}\mathrm{d}z \in (0,\infty).$$

Gracias a esto, se puede considerar que

$$(3.62) = \frac{2}{(\beta-1)^2}\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y$$

donde $f(y)$ cumple que, aplicando el teorema de convergencia monótona

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 0^+}\frac{f(y)}{y^a\exp\left\{Ay^{-b}\right\}} &= \lim_{y\to 0^+}\int_y^1 z^{-a}\exp\left\{-Az^{-b}\right\}\mathrm{d}z\\ &= \int_0^1 z^{-a}\exp\left\{-Az^{-b}\right\}\mathrm{d}z \in (0,\infty),\end{aligned}$$

y con esto se concluye que

$$\lim_{x\to 0^+} v(x) = \frac{2}{(\beta-1)^2}\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y \sim \int_0^1 y^a \exp\left\{Ay^{-b}\right\}\mathrm{d}y = \infty,$$

debido nuevamente a la positividad de A y b. Esto implica entonces que $X_{t\wedge T_0}$ es siempre una martingala en este caso.

Continuando con el análisis, cuando $\theta < 0$ se tiene que toda solución es buena gracias al teorema 2.6, y por otra parte, se obtiene que

$$(3.56) = \frac{2}{(\beta-1)^2}\int_x^1 y^a \exp\left\{Ay^b\right\}\int_y^1 z^{-a}\exp\left\{-Az^b\right\}\mathrm{d}z\mathrm{d}y, \tag{3.63}$$

donde,

$$A = \frac{2K}{-\theta}\ ;\ a = \frac{2\rho-\beta}{\beta-1}\ ;$$
$$b = \frac{-\theta}{\beta-1}.$$

muy similar al caso anterior. Sin embargo, como ahora b aparece sin el signo negativo dentro de las integrales, se tiene que

$$\exp\left\{-Az^b\right\}\ ,\ \exp\left\{Az^b\right\} \in [\exp\{-|A|\}\ ,\ \exp\{|A|\}] \quad \forall z\in[0,1],$$

de donde se obtienen las siguientes cotas

$$\frac{2\exp\{-2|A|\}}{(\beta-1)^2}\int_x^1 y^a\int_y^1 z^{-a}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \le (3.63) \le \frac{2\exp\{2|A|\}}{(\beta-1)^2}\int_x^1 y^a\int_y^1 z^{-a}\mathrm{d}z\mathrm{d}y,$$

y por ende se puede concluir que

$$\lim_{x\to 0^+} v(x) \sim \int_0^1 y^a\int_y^1 z^{-a}\mathrm{d}z\mathrm{d}y.$$

Para finalizar basta notar que, gracias al análisis de (3.60), es conocido que esta última integral es finita, y $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala local estricta, si y solo si $a > -1$ o equivalentemente si $\rho > \frac{1}{2}$, que es el primer caso del teorema.

Por último queda abordar la situación en que $\theta \neq 0$ y $\alpha \neq \beta - 1$. Volviendo a (3.58), se tiene que ahora

$$(3.56) = \frac{2}{(\beta-1)^2}\int_x^1 y^{\mathrm{e}}\exp\left\{Ay^a - By^{-b}\right\}\int_y^1 z^{-\mathrm{e}}\exp\left\{-Az^a + Bz^{-b}\right\}\mathrm{d}z\mathrm{d}y, \tag{3.64}$$

donde

$$b = \frac{\theta}{\beta-1}\ ;\ B = \frac{2K}{\theta}\ ;\ \mathrm{e} = \frac{-\beta}{\beta-1}\ ;$$
$$A = \frac{2\rho}{\beta-1-\alpha}\ ;\ a = \frac{\beta-1-\alpha}{\beta-1}.$$

Como ya es costumbre, se separa el análisis en casos, comenzando por $\theta > 0$. Esto implica que $\delta > 1$, pues $\beta > 1$, y por ende solamente interesa estudiar el comportamiento cuando $K < 0$, lo que fuerza a que $\rho > 0$. Esto entrega que $b > 0$ y $B < 0$. Por otra parte, se trata primero el caso $\beta - 1 > \alpha$, de donde se obtiene A, $a > 0$. Todo esto entrega que

$$\exp\left\{-Az^a + Bz^{-b}\right\} \xrightarrow{z\to 0^+} 0,$$

y más aun se tiene que esta función es creciente entre 0 y un $z_0 \in (0,1)$. Esto implica que

$$\begin{aligned}
(3.64) &\geq \frac{2}{(\beta-1)^2}\int_x^{z_0} y^{\mathrm{e}} \exp\left\{Ay^a - By^{-b}\right\}\int_y^1 z^{-\mathrm{e}}\exp\left\{-Az^a + Bz^{-b}\right\}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&\geq \frac{2}{(\beta-1)^2}\int_x^{z_0} y^{\mathrm{e}} \exp\left\{Ay^a - By^{-b}\right\}\int_y^{z_0} z^{-\mathrm{e}}\exp\left\{-Az^a + Bz^{-b}\right\}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&\geq \frac{2}{(\beta-1)^2}\int_x^{z_0} y^{\mathrm{e}} \exp\left\{Ay^a - By^{-b}\right\}\exp\left\{-Ay^a + By^{-b}\right\}\int_y^{z_0} z^{-\mathrm{e}}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{(\beta-1)^2}\int_x^{z_0} y^{\mathrm{e}} \int_y^{z_0} z^{-\mathrm{e}}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \xrightarrow{x\to 0^+} \infty,
\end{aligned}$$

notando que

$$\mathrm{e} \leq -1 \iff -\beta \leq 1-\beta \iff 0 \leq 1, \tag{3.65}$$

y entonces por lo hecho al estudiar (3.60) se tiene dicha explosión a infinito, de donde se concluye que $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala en este caso.

Ahora, siguiendo con cuando $\beta - 1 < \alpha$, se tiene que a, $A < 0$ y hay que dividir el estudio nuevamente en casos distintos. Se comienza por estudiar lo que sucede cuando $a = -b$, lo que equivale a que $\delta = \alpha + \beta$. En este caso

$$(3.64) = \frac{2}{(\beta-1)^2}\int_x^1 y^{\mathrm{e}}\exp\left\{(A-B)y^{-b}\right\}\int_y^1 z^{-\mathrm{e}}\exp\left\{(-A+B)z^{-b}\right\}\mathrm{d}z\mathrm{d}y, \tag{3.66}$$

y nuevamente es conveniente situarse en tres distintos casos para seguir el análisis. Estos son

1. $K = -\rho$: En este caso se cumple que $A = B$ y por ende

$$(3.66) = \frac{2}{(\beta-1)^2}\int_x^1 y^{\mathrm{e}}\int_y^1 z^{-\mathrm{e}}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \xrightarrow{x\to 0^+} \infty,$$

   por lo ya visto en (3.60) y (3.65), mostrando que $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala en este caso.

2. $K < -\rho$: Ahora se tiene que $B - A < 0$, de donde se obtiene que

$$\exp\left\{(-A+B)z^{-b}\right\} \xrightarrow{z\to 0^+} 0,$$

   y claramente dicha función es creciente, luego

$$\begin{aligned}
(3.66) &\geq \frac{2}{(\beta-1)^2}\int_x^1 y^{\mathrm{e}}\exp\left\{(A-B)y^{-b}\right\}\exp\left\{(-A+B)y^{-b}\right\}\int_y^1 z^{-\mathrm{e}}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{(\beta-1)^2}\int_x^1 y^{\mathrm{e}}\int_y^1 z^{-\mathrm{e}}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \xrightarrow{x\to 0^+} \infty,
\end{aligned}$$

   al igual que antes, y entonces $X_{t\wedge T_0}$ sigue siendo martingala.

3. $K \in (-\rho, 0)$: En este caso se tiene que $B - A > 0$ y por esto

$$\exp\left\{(-A+B)z^{-b}\right\} \xrightarrow{z\to 0^+} \infty,$$

y luego

$$(3.66) = \frac{2}{(\beta-1)^2}\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y,$$

donde $f(y)$ satisface que

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to 0^+}\frac{f(y)}{y^{(b+1)}} &= \lim_{y\to 0^+}\frac{\int_y^1 z^{-\mathrm{e}}\exp\left\{(-A+B)z^{-b}\right\}\mathrm{d}z}{y^{(b+1-\mathrm{e})}\exp\left\{(-A+B)y^{-b}\right\}} \\
&= \lim_{y\to 0^+}\frac{-y^{-\mathrm{e}}\exp\left\{(-A+B)y^{-b}\right\}}{\exp\left\{(-A+B)y^{-b}\right\}\left(-b(-A+B)y^{-\mathrm{e}}+(b+1-\mathrm{e})y^{b-\mathrm{e}}\right)} \\
&= \lim_{y\to 0^+}\frac{-1}{-b(-A+B)+(b+1-\mathrm{e})y^{b}} = \frac{1}{b(B-A)} \in (0,\infty),
\end{aligned}$$

lo que implica que se tiene

$$\lim_{x\to 0^+} v(x) = \frac{2}{(\beta-1)^2}\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y \sim \int_0^1 y^{b+1}\mathrm{d}y < \infty,$$

pues $b > 0$, y entonces aquí $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala local estricta, lo que coincide con el caso 6 del teorema.

Pasando ahora al caso $\delta > \alpha + \beta$, o bien $a > -b$, basta notar que

$$\exp\left\{-Az^{a}+Bz^{-b}\right\} = \exp\left\{z^{-b}(-Az^{a+b}+B)\right\} \xrightarrow{z\to 0^+} 0,$$

y nuevamente esta función es creciente entre 0 y un $z_0 \in (0,1)$, lo que implica que

$$\begin{aligned}
(3.64) &\geq \frac{2}{(\beta-1)^2}\int_x^{z_0} y^{\mathrm{e}}\exp\left\{Ay^{a}-By^{-b}\right\}\exp\left\{-Ay^{a}+By^{-b}\right\}\int_y^{z_0} z^{-\mathrm{e}}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{(\beta-1)^2}\int_x^{z_0} y^{\mathrm{e}}\int_y^{z_0} z^{-\mathrm{e}}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \xrightarrow{x\to 0^+} \infty,
\end{aligned}$$

y entonces $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala.

Para finalizar el caso $\theta > 0$, basta estudiar que sucede en el caso que $\delta < \alpha + \beta$, o lo que es equivalente $a < -b$, donde se tiene que

$$\exp\left\{-Az^{a}+Bz^{-b}\right\} = \exp\left\{z^{a}(-A+Bz^{-b-a})\right\} \xrightarrow{z\to 0^+} \infty,$$

y entonces

$$(3.64) = \frac{2}{(\beta-1)^2}\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y,$$

donde $f(y)$ cumple que

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to 0^+} \frac{f(y)}{y^{(-a+1)}} &= \lim_{y\to 0^+} \frac{\int_y^1 z^{-\mathrm{e}} \exp\left\{-Az^a + Bz^{-b}\right\} \mathrm{d}z}{y^{1-a-\mathrm{e}} \exp\{-Ay^a + By^{-b}\}} \\
&= \lim_{y\to 0^+} \frac{-y^{-\mathrm{e}} \exp\left\{-Ay^a + By^{-b}\right\}}{\exp\{-Ay^a + By^{-b}\} (-Aay^{-\mathrm{e}} - Bby^{-b-a-\mathrm{e}} + (1-a-\mathrm{e})y^{-a-\mathrm{e}})} \\
&= \lim_{y\to 0^+} \frac{-1}{-Aa - Bby^{-b-a} + (1-a-\mathrm{e})y^{-a}} = \frac{1}{Aa} \in (0,\infty),
\end{aligned} \tag{3.67}$$

y luego se concluye que

$$\lim_{x\to 0^+} v(x) = \frac{2}{(\beta-1)^2} \int_0^1 f(y)\mathrm{d}y \sim \int_0^1 y^{1-a}\mathrm{d}y < \infty,$$

pues $a < 0$. Esto permite concluir que $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala local estricta en este caso, que es el caso 5 del enunciado.

Ahora queda estudiar el comportamiento de $v(x)$ cuando $\theta < 0$, o en otras palabras, $\delta < 2\beta - 1$ lo que implica gracias al teorema 2.6 que toda solución de σ_t es **buena**. Por otra parte, como $\theta < 0$, se tiene que $b < 0$, lo que es crucial en el análisis restante. Nuevamente se comienza a analizar por casos, comenzando por cuando $\beta - 1 > \alpha$, lo que fuerza $a > 0$. Esto implica que

$$\exp\left\{-Ay^a + By^{-b}\right\} \xrightarrow{y\to 0^+} 1,$$

y además es continua y finita fuera de 0. Esto lleva a concluir que existen $0 < m_1 < M_1 < \infty$ tales que

$$\exp\left\{-Ay^a + By^{-b}\right\} \in [m_1, M_1] \text{ , } \forall y \in [0,1],$$

y de la misma forma existen $0 < m_2 < M_2 < \infty$ tales que

$$\exp\left\{Ay^a - By^{-b}\right\} \in [m_2, M_2] \text{ , } \forall y \in [0,1],$$

Todo esto lleva a que se tienen las siguientes cotas

$$\frac{2m_1m_2}{(\beta-1)^2} \int_x^1 y^{\mathrm{e}} \int_y^1 z^{-\mathrm{e}}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \le v(x) \le \frac{2M_1M_2}{(\beta-1)^2} \int_x^1 y^{\mathrm{e}} \int_y^1 z^{-\mathrm{e}}\mathrm{d}z\mathrm{d}y,$$

y por ende

$$\lim_{x\to 0^+} v(x) \sim \int_0^1 y^{\mathrm{e}} \int_y^1 z^{-\mathrm{e}}\mathrm{d}z\mathrm{d}y = \infty,$$

por lo hecho anteriormente en (3.60). De aquí se obtiene que $X_{t\wedge T_0}$ es siempre martingala en este caso.

Por otra parte, cuando $\beta - 1 < \alpha$, o $a < 0$, conviene de nuevo dividirse en casos dependiendo del signo de ρ. Comenzando con cuando $\rho < 0$ y por ende $A > 0$, de donde se obtiene que

$$\exp\{-Az^a\} \xrightarrow{z\to 0^+} 0,$$

y lo hace de forma decreciente, mientras que, como

$$\exp\left\{\pm Bz^{-b}\right\} \geq \exp\left\{-|B|\right\} \quad \forall z \in [0,1], \tag{3.68}$$

se obtiene que

$$\begin{aligned}
(3.64) &\geq \frac{2\exp\{-2|B|\}}{(\beta-1)^2}\int_x^1 y^{\mathrm{e}}\exp\{Ay^a\}\int_y^1 z^{-\mathrm{e}}\exp\{-Az^a\}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&\geq \frac{2\exp\{-2|B|\}}{(\beta-1)^2}\int_x^1 y^{\mathrm{e}}\exp\{Ay^a\}\exp\{-Ay^a\}\int_y^1 z^{-\mathrm{e}}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&= \frac{2\exp\{-2|B|\}}{(\beta-1)^2}\int_x^1 y^{\mathrm{e}}\int_y^1 z^{-\mathrm{e}}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \xrightarrow{x\to 0^+} \infty,
\end{aligned}$$

como antes, y por ende $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala en este caso.

Siguiendo con cuando $\rho = 0$, lo que implica que $A = 0$, se tiene que, gracias a (3.68)

$$\begin{aligned}
(3.64) &= \frac{2}{(\beta-1)^2}\int_x^1 y^{\mathrm{e}}\exp\left\{-By^{-b}\right\}\int_y^1 z^{-\mathrm{e}}\exp\left\{Bz^{-b}\right\}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&\geq \frac{2\exp\{-2|B|\}}{(\beta-1)^2}\int_x^1 y^{\mathrm{e}}\int_y^1 z^{-\mathrm{e}}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \xrightarrow{x\to 0^+} \infty,
\end{aligned}$$

y se llega a la misma conclusión de que $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala.

Finalmente, si $\rho > 0$ entonces $A < 0$, lo que conlleva que

$$\exp\left\{-Ay^a + By^{-b}\right\} \xrightarrow{y\to 0^+} \infty,$$

y se tiene entonces que

$$(3.64) = \frac{2}{(\beta-1)^2}\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y,$$

donde $f(y)$ satisface, de la misma forma que en (3.67), que

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{f(y)}{y^{(-a+1)}} = \frac{1}{Aa} \in (0,\infty),$$

y luego se obtiene que

$$\lim_{x\to 0^+} v(x) = \frac{2}{(\beta-1)^2}\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y \sim \int_0^1 y^{1-a}\mathrm{d}y < \infty,$$

pues $a < 0$, concluyendo así que $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala local estricta en este caso, que es el segundo del enunciado del teorema. □

Habiendo completado la descripción del comportamiento de la propiedad de martingala del proceso $X_{t\wedge T_0}$ para todos los casos, se puede ver además que, en conjunto, las condiciones de los teoremas 3.5 y 3.6 son compatibles con las condiciones más generales del teorema 3.7. Por esto, se propone el siguiente teorema a modo de resumen, que agrupa todos los resultados del capítulo 3, junto con el teorema 2.6, que resume el capítulo 2.

Teorema 3.8 *Se considera el sistema*

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = X_t \sigma_t^\alpha \mathrm{d}W_t \ , \quad X_0 = x_0 > 0, \\ \mathrm{d}\sigma_t = \sigma_t^\beta \mathrm{d}B_t + K\sigma_t^\delta \mathrm{d}t \ , \quad \sigma_0 > 0, \end{cases}$$

*donde $\delta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ y $K \neq 0$. Este sistema es estudiado en este caso cuando la única solución débil hasta un tiempo de explosión σ_t, extendida continuamente por 0 para todo $t \geq T_0$, es **buena**, es decir, cuando no explota a infinito con probabilidad 1. Esto se tiene si y solo si se tiene alguno de los siguientes casos no intersectantes*

1. $\delta < 2\beta - 1$.
2. $\delta = 2\beta - 1$, $K \leq 1/2$.
3. $\delta = 2\beta - 1$, $K > 1/2$, $\beta \leq 1$.
4. $\delta > 2\beta - 1$, $K < 0$.
5. $\delta > 2\beta - 1$, $K > 0$, $\delta \leq 1$.

*Luego, si se considera que σ_t es **buena**; si $\rho > 0$ y sucede cualquiera de los siguientes casos no intersectantes*

1. $\delta < 2\beta - 1$, $\alpha = \beta - 1$, $\rho > \frac{1}{2}$.
2. $\delta < 2\beta - 1$, $\alpha > \beta - 1$, $\alpha + \beta > 1$.
3. $\delta = 2\beta - 1$, $\alpha = \beta - 1$, $K + \rho > \frac{1}{2}$.
4. $\delta = 2\beta - 1$, $\alpha > \beta - 1$, $\alpha + \beta > 1$.
5. $\delta > 2\beta - 1$, $\alpha > \beta - 1$, $\alpha + \beta > 1$, $\delta < \alpha + \beta$.
6. $\delta > 2\beta - 1$, $\alpha > \beta - 1$, $\alpha + \beta > 1$, $\delta = \alpha + \beta$, $K \in (-\rho, 0)$.

entonces $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala local estricta. Por otra parte, si $\rho > 0$ y no se cumple 1, 2, 3, 4, 5 o 6; o si $\rho \leq 0$, $X_{t\wedge T_0}$ es una martingala.

Conclusión

Los resultados presentados anteriormente logran englobar el problema central de este trabajo en su totalidad. Junto con lo estudiado en el capítulo 2, se definen los parámetros para los cuales el modelo de volatilidad estocástica planteado en un principio tiene un comportamiento favorable a ser analizado; y luego se investiga caso a caso cómo se ve afectada la propiedad de martingala de la solución de acuerdo a estos valores. Además, todo lo anterior se basa fuertemente en los fundamentos matemáticos introducidos en el capítulo 1.

Más aun, estos resultados corroboran comportamientos encontrados en trabajos anteriores (ver [5]). La solución siempre satisface la propiedad de martingala en los casos donde ρ es menor o igual a 0, independiente del valor de los parámetros (siempre y cuando la solución de σ_t sea buena). Aparece nuevamente como valor límite en el caso de $\beta < 1$ la suma de α y β, mientras que en el caso $\beta > 1$ cobra denuevo importancia la suma de 1, α y menos β, junto con el límite de $\frac{1}{2}$ para el valor de ρ, pero solo cuando la suma anterior es nula.

Por otra parte, la incorporación del término de drift crea otros casos límites consistentes para todos los valores de β. El valor de la variable θ, que ya es crucial para el análisis llevado a cabo en el capítulo 2, vuelve a tomar el rol definitorio para diferenciar el comportamiento del proceso de precio. Además aparece como nuevo término de interés la suma de α, β y menos δ, cuyo signo define el punto crítico en los resultados encontrados, mientras que cuando este valor es nulo, toma importancia el valor de la variable K, comparada con ρ.

Sin embargo, aunque estos términos clave quedan claramente identificados a través del trabajo, no se encuentra una explicación más profunda que el cálculo mismo que le atribuya relevancia a estos términos. Heurísticamente, por ejemplo, cuando ρ es negativo, existe una relación inversa entre el crecimiento de W_t con el de B_t, a lo cual se le puede atribuir el comportamiento de martingala de la ecuación en este caso. Por otro lado, el valor de θ esta asociado en este caso a la integrabilidad hacia infinito del cuociente

$$\frac{b(x)}{\sigma^2(x)},$$

de la ecuación de σ_t, término recurrente en el análisis de ecuaciones diferenciales estocásticas (ver por ejemplo [9]). No obstante, no se han encontrado conexiones más allá de estas representaciones heurísticas, que no logran siquiera cubrir todos los términos límite, y es posible que esto sea así, son valores que toman importancia gracias a los cálculos realizados y no por alguna interpretación externa.

Ahora bien, los métodos y resultados encontrados en este trabajo abren las puertas para poder atacar casos aun más generales dentro de este mismo problema, sin tener que recurrir a herramientas ajenas a este. Como primer ejemplo, se puede considerar el modelo de volatilidad estocástica con drift polinomial

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t &= X_t \sigma_t^{\alpha} \mathrm{d}W_t, \quad X_0 = x_0 > 0, \\ \mathrm{d}\sigma_t &= \sigma_t^{\beta} \mathrm{d}B_t + \sum_{\mathrm{i}=1}^{N} K_{\mathrm{i}} \sigma_t^{\delta_{\mathrm{i}}} \mathrm{d}t, \quad \sigma_0 > 0, \end{aligned}$$

donde α es positivo, N es mayor que 1, β, los δ_{i} y los K_{i} son números reales; y sin pérdida de generalidad se puede considerar que los δ_{i} son distintos y los K_{i} son distintos de 0. Más aun, se puede suponer que δ_{i} es mayor que $\delta_{\mathrm{i}+1}$ para todo i.

Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso estudiado, se comienza con identificar cuándo esta ecuación tiene sentido en el contexto del trabajo. Usando los argumentos presentados en el capítulo 2, se ve que la ecuación de volatilidad tiene una única solución débil positiva hasta un tiempo de explosión, y basta estudiar para qué valores de los parámetros dicha solución explota a infinito con probabilidad positiva para así concluir un análogo al teorema 2.6. Es fácil notar que en este caso la función $v(x)$ que rige la explosión de la solución σ_t de acuerdo al teorema 1.7 es

$$\begin{aligned} v(x) = 2 \int_1^x \exp\left\{ -2 \sum_{\mathrm{i} \neq \mathrm{i}^*} \frac{K_{\mathrm{i}}}{\theta_{\mathrm{i}}} y^{\theta_{\mathrm{i}}} - (1-\chi) \frac{2K_{\mathrm{i}^*}}{\theta_{\mathrm{i}^*}} y^{\theta_{\mathrm{i}^*}} \right\} y^{\chi(-2K_{\mathrm{i}^*})} \\ \int_1^y \exp\left\{ 2 \sum_{\mathrm{i} \neq \mathrm{i}^*} \frac{K_{\mathrm{i}}}{\theta_{\mathrm{i}}} z^{\theta_{\mathrm{i}}} + (1-\chi) \frac{2K_{\mathrm{i}^*}}{\theta_{\mathrm{i}^*}} z^{\theta_{\mathrm{i}^*}} \right\} z^{\chi(2K_{\mathrm{i}^*})-2\beta} \mathrm{d}z \mathrm{d}y, \end{aligned}$$

donde $\theta_{\mathrm{i}} = \delta_{\mathrm{i}} - 2\beta + 1$, i^* es un índice fijo al cual se le asocia, si es que existe, el valor δ_{i^*} tal que $\theta_{\mathrm{i}^*} = 0$, y χ es la indicatriz de que existe dicho índice tal que θ_{i^*} es nulo.

Gracias a lo hecho tanto en el capítulo 2 como en el 3 en cuanto al estudio de la divergencia de funciones de este estilo a infinito, se desprende que θ_1 es el valor que controla la explosión. Si θ_1 es negativo, entonces todos los θ_{i} son negativos, y existe una constante positiva C_0 tal que la integral anterior se puede acotar inferiormente por

$$2C_0 \int_1^x \int_1^z z^{-2\beta} \mathrm{d}z \mathrm{d}y \xrightarrow{x \to \infty} \infty,$$

como en la proposición 2.3.

Si θ_1 es nulo, entonces el resto de los θ_{i} son negativos, y luego existen constantes C_1 y C_2 positivas tales que

$$2C_1 \int_1^x y^{-2K_1} \int_1^z z^{2K_1 - 2\beta} \mathrm{d}z \mathrm{d}y \leq v(x) \leq 2C_2 \int_1^x y^{-2K_1} \int_1^z z^{2K_1 - 2\beta} \mathrm{d}z \mathrm{d}y.$$

Esto lleva a concluir que $v(x)$ diverge si y solo si lo hace

$$\int_1^x y^{-2K_1} \int_1^z z^{2K_1 - 2\beta} \mathrm{d}z \mathrm{d}y,$$

problema que es estudiado en la demostración de la proposición 2.1. Por último, si θ_1 es positivo, la divergencia de la integral depende del signo de K_1. Si K_1 es negativo, entonces se puede ver que

$$\exp\left\{2\sum_{\mathrm{i}\neq\mathrm{i}^*}\frac{K_\mathrm{i}}{\theta_\mathrm{i}}x^{\theta_\mathrm{i}}+(1-\chi)\frac{2K_{\mathrm{i}^*}}{\theta_{\mathrm{i}^*}}x^{\theta_{\mathrm{i}^*}}\right\}x^{\chi(2K_{\mathrm{i}^*})}\xrightarrow{x\to\infty}0,$$

y lo hace de manera monótona desde un c_0 positivo. Así, usando lo visto en la proposición 2.3, se obtiene que para x suficientemente grande

$$v(x)\geq\int_{c_0}^{x}\int_{c_0}^{z}z^{-2\beta}\mathrm{d}z\mathrm{d}y\xrightarrow{x\to\infty}\infty,$$

ligeramente modificando el argumento usado para probar dicha proposición.

Ahora bien, si K_1 es positivo, entonces

$$\exp\left\{2\sum_{\mathrm{i}\neq\mathrm{i}^*}\frac{K_\mathrm{i}}{\theta_\mathrm{i}}x^{\theta_\mathrm{i}}+(1-\chi)\frac{2K_{\mathrm{i}^*}}{\theta_{\mathrm{i}^*}}x^{\theta_{\mathrm{i}^*}}\right\}x^{\chi(2K_{\mathrm{i}^*})-2\beta}\xrightarrow{x\to\infty}\infty,$$

y más aun

$$\int_{1}^{x}\exp\left\{2\sum_{\mathrm{i}\neq\mathrm{i}^*}\frac{K_\mathrm{i}}{\theta_\mathrm{i}}y^{\theta_\mathrm{i}}+(1-\chi)\frac{2K_{\mathrm{i}^*}}{\theta_{\mathrm{i}^*}}y^{\theta_{\mathrm{i}^*}}\right\}y^{\chi(2K_{\mathrm{i}^*})-2\beta}\mathrm{d}x\xrightarrow{x\to\infty}\infty,$$

y luego, replicando los argumentos de la proposición 2.2, modificándolos al caso, se puede probar que

$$\lim_{x\to\infty}v(x)\sim\int_{1}^{\infty}y^{-\delta_1}\mathrm{d}y,$$

donde este último término es finito si y solo si δ_1 es mayor estricto que 1. Todo esto implica entonces que la solución de la ecuación de volatilidad para este caso generalizado cumple el siguiente teorema

Teorema 3.9 *Se considera la ecuación*

$$\mathrm{d}\sigma_t=\sigma_t^{\beta}\mathrm{d}B_t+\sum_{\mathrm{i}=1}^{N}K_\mathrm{i}\sigma_t^{\delta_\mathrm{i}}\mathrm{d}t,\quad\sigma_0>0,$$

donde $\alpha>0$, $N>1$, β *y* $\delta_\mathrm{i}\in\mathbb{R}$, $K_\mathrm{i}\neq0$, $\forall 1\leq\mathrm{i}\leq N$; $\delta_\mathrm{i}\neq\delta_j$, $\forall\mathrm{i}\neq j$. *Más aun, sin pérdida de generalidad* $\delta_\mathrm{i}>\delta_{\mathrm{i}+1}$, $\forall 1\leq\mathrm{i}<N$. *Su única solución débil positiva hasta un tiempo de explosión es* ***buena*** *si y solo si la solución de*

$$\mathrm{d}\sigma_t=\sigma_t^{\beta}\mathrm{d}B_t+K_1\sigma_t^{\delta_1}\mathrm{d}t,\quad\sigma_0>0,$$

lo es.

y dicha condición se puede verificar usando el teorema 2.6.

Esta misma generalización puede ser aplicada a los resultados encontrados en el capítulo 3, notando que la forma exacta de la ecuación de σ_t se usa solamente en cálculos puntuales dentro de los teoremas. Por ejemplo, el resultado del teorema 3.3 puede ser fácilmente extendido al caso en cuestión, tomando como hipótesis $K_{\mathrm{i}} < 0$ para todo i junto con que $\rho \leq 0$. Para esto, basta notar que en la desigualdad (3.17) se reemplaza

$$K \int_0^{t \wedge T_\varepsilon \wedge \tau} X_s^\gamma \sigma_s^\delta \mathrm{d}s,$$

por

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{N} K_{\mathrm{i}} \int_0^{t \wedge T_\varepsilon \wedge \tau} X_s^\gamma \sigma_s^{\delta_{\mathrm{i}}} \mathrm{d}s,$$

y gracias a la hipótesis impuesta junto con la linealidad de la esperanza, la desigualdad (3.18) se mantiene y, por ende, también lo hace el resultado.

Ahora bien, para poder abordar el resto de los casos posibles en este modelo generalizado, es necesario deducir resultados como los teoremas 3.5, 3.6 y 3.7. Los casos en los que dividir el problemas siguen siendo los mismos con respecto al valor de β: subcrítico, crítico y supercrítico. Esto implica entonces que para cada caso se aplican las mismas funciones de cambio de variable que se usan en dichos resultados, pero la ecuación final que se estudia en cada caso cambia para incorporar los N términos. En concreto, se tiene que para el caso subcrítico ($\beta < 1$), la ecuación (3.34) es reemplazada por la ecuación

$$\mathrm{d}z_t = (1-\beta)\mathrm{d}\tilde{B}_t + \left\{ \sum_{\mathrm{i}=1}^{N} K_{\mathrm{i}}(1-\beta) z_t^{\frac{\delta_{\mathrm{i}}-\beta}{1-\beta}} + \rho(1-\beta) z_t^{\frac{\alpha}{1-\beta}} + \frac{\beta(\beta-1)}{2} z_t^{-1} \right\} \mathrm{d}t,$$

mientras que en el caso crítico ($\beta = 1$), la ecuación

$$\mathrm{d}z_t = \alpha \mathrm{d}\tilde{B}_t + \left\{ K\alpha \exp\left(z_t \frac{\delta-1}{\alpha} \right) + \rho\alpha \exp(z_t) - \frac{\alpha}{2} \right\},$$

se transforma en

$$\mathrm{d}z_t = \alpha \mathrm{d}\tilde{B}_t + \left\{ \sum_{\mathrm{i}=1}^{N} K_{\mathrm{i}}\alpha \exp\left(z_t \frac{\delta_{\mathrm{i}}-1}{\alpha} \right) + \rho\alpha \exp(z_t) - \frac{\alpha}{2} \right\},$$

y en el caso supercrítico ($\beta > 1$) la ecuación asociada a la función (3.55) pasa a ser

$$\mathrm{d}z_t = -(\beta-1)\mathrm{d}\tilde{B}_t + \left\{ -\sum_{\mathrm{i}=1}^{N} K_{\mathrm{i}}(\beta-1) z_t^{\frac{\beta-\delta_{\mathrm{i}}}{\beta-1}} - \rho(\beta-1) z_t^{\frac{-\alpha}{\beta-1}} + \frac{\beta(\beta-1)}{2} z_t^{-1} \right\} \mathrm{d}t.$$

Analizar completamente estas nuevas ecuaciones requiere extender innecesariamente los límites de este trabajo, pero es claro que con las mismas herramientas presentadas en el capítulo 3, se pueden deducir teoremas equivalentes a los 3.5, 3.6 y 3.7 para este caso generalizado. Vale mencionar sin embargo que haciendo una inspección de dichos teoremas y considerando además el teorema 3.9, es fácil ver que se tienen los mismos resultados que los teoremas 3.5, 3.6 y 3.7, cambiando en las condiciones δ por δ_1 y K por K_1, donde δ_1 sigue siendo el máximo de los δ_{i}, excepto en casos límite donde $\theta_1 > 0$, $\delta_1 = \alpha+\beta$, $\rho > 0$ y $K_1 < 0$, que es solo una de las condiciones del teorema 3.8.

Una implicancia importante de esto último es que ahora, si se considera el sistema

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t &= X_t\sigma_t^{\alpha}\mathrm{d}W_t\ , \quad X_0 = x_0 > 0, \\ \mathrm{d}\sigma_t &= \sigma_t^{\beta}\mathrm{d}B_t + K\sigma_t^{\delta}\mathrm{d}t\ , \quad \sigma_0 > 0, \end{aligned}$$

con las mismas condiciones que en (3.1), pero ahora con $\alpha < 0$, un caso que queda sin abordar en los capítulos anteriores, este problema se vuelve tratable. Basta considerar que, como solamente se trabaja en el intervalo donde $\sigma_t > 0$, entonces se puede aplicar el siguiente cambio de variable

$$\eta_t = \sigma_t^{-1}$$

y como la función

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

es suficientemente regular en $(0,\infty)$, se puede aplicar la regla de Itô (como en el teorema 3.5), para ver que η_t satisface la ecuación

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\eta_t &= f'(\sigma_t)\mathrm{d}\sigma_t + \frac{1}{2}f''(\sigma_t)\mathrm{d}\langle\sigma\rangle_t \\ &= -\frac{1}{\sigma_t^2}\left(\sigma_t^{\beta}\mathrm{d}B_t + K\sigma_t^{\delta}\mathrm{d}t\right) + \frac{1}{\sigma_t^3}\sigma_t^{2\beta}\mathrm{d}t \\ &= -\eta_t^{2-\beta}\mathrm{d}B_t + \left(\eta_t^{3-2\beta} - K\eta_t^{2-\delta}\right)\mathrm{d}t \\ &= \eta_t^{2-\beta}\mathrm{d}B_t' + \left(\eta_t^{3-2\beta} - K\eta_t^{2-\delta}\right)\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

donde B_t' es igual a $-B_t$, que también es un movimiento browniano, pero esta $(-\rho)$ correlacionado con W_t. Así, se tiene ahora que X_t satisface el sistema

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t &= X_t\eta_t^{-\alpha}\mathrm{d}W_t\ , \quad X_0 = x_0 > 0, \\ \mathrm{d}\eta_t &= \eta_t^{2-\beta}\mathrm{d}B_t' + \left(\eta_t^{3-2\beta} - K\eta_t^{2-\delta}\right)\mathrm{d}t\ , \quad \eta_0 = \frac{1}{\sigma_0} > 0, \end{aligned}$$

que tiene la forma exacta del modelo generalizado que se discute en esta sección y entonces se pueden encontrar las condiciones para las cuales el proceso de precio satisface la propiedad de martingala aun cuando α es menor que 0 en el problema original. De la misma forma, se puede abordar el caso generalizado para α menor a 0, aplicando el mismo cambio de variable para transformar el sistema

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t &= X_t\sigma_t^{\alpha}\mathrm{d}W_t\ , \quad X_0 = x_0 > 0, \\ \mathrm{d}\sigma_t &= \sigma_t^{\beta}\mathrm{d}B_t + \sum_{\mathrm{i}=1}^{N} K_{\mathrm{i}}\sigma_t^{\delta_{\mathrm{i}}}\mathrm{d}t\ , \quad \sigma_0 > 0, \end{aligned}$$

a

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}X_t &= X_t \eta_t^{-\alpha} \mathrm{d}W_t \ , \quad X_0 = x_0 > 0, \\
\mathrm{d}\eta_t &= \eta_t^{2-\beta} \mathrm{d}B'_t + \left(\eta_t^{3-2\beta} - \sum_{\mathrm{i}=1}^{N} K_{\mathrm{i}} \eta_t^{2-\delta_{\mathrm{i}}} \right) \mathrm{d}t \ , \quad \eta_0 = \frac{1}{\sigma_0} > 0,
\end{aligned}
$$

que queda dentro de los casos abordados en el teorema 3.9.

Esta nueva incorporación de casos más generales que el original planteado abre un camino para estudiar problemas interesantes que hasta ahora han quedado fuera del análisis. Un ejemplo de esto es considerar una función positiva general $b(x)$, que satisfaga

$$
b(x) \leq A(x^p + 1), \quad \forall x > 0,
$$

para p y A reales, y estudiar el sistema

$$
\begin{aligned}
X_t &= X_t \sigma_t^{\alpha} \mathrm{d}W_t \ , \quad X_0 = x_0 > 0, \\
\mathrm{d}\sigma_t &= \sigma_t^{\beta} \mathrm{d}B_t + b(\sigma_t) \mathrm{d}t \ , \quad \sigma_0 > 0,
\end{aligned}
$$

encontrando resultados similares a los anteriores en función de los parámetros p y A.

Otro problema de interés que escapa a los resultados de este trabajo es el de considerar el sistema

$$
\begin{aligned}
X_t &= X_t^{\gamma} \sigma_t^{\alpha} \mathrm{d}W_t \ , \quad X_0 = x_0 > 0, \\
\mathrm{d}\sigma_t &= \sigma_t^{\beta} \mathrm{d}B_t + K \sigma_t^{\delta} \mathrm{d}t \ , \quad \sigma_0 > 0,
\end{aligned}
$$

restringiendo o no los parámetros en cuestión. En particular, el caso γ positivo es representativo para el modelamiento financiero (ver [11]).

Esto muestra que, a pesar de la generalidad, completitud y poder descriptivo de los teoremas principales de este trabajo, queda mucho camino por recorrer. El estudio de los sistemas de volatilidad estocástica, tanto para el modelamiento de procesos de precio en particular y como objeto matemático en general, está lejos de dejar de ofrecer problemas, interesantes y difíciles a la vez, a los investigadores en el área de las probabilidades.

Bibliografía

[1] L. B. G. Andersen and V. V. Piterbarg, *Moment explosions in stochastic volatility models*, Finance and Stochastics, 11 (2006), p. 29–50.

[2] A. M. G. Cox and D. G. Hobson, *Local martingales, bubbles and option prices*, Finance and Stochastics, 9 (2005), p. 477–492.

[3] S. L. Heston, M. Loewenstein, and G. A. Willard, *Options and bubbles*, Review of Financial Studies, 20 (2006), p. 359–390.

[4] R. Jarrow, Y. Kchia, and P. Protter, *How to detect an asset bubble*, SIAM Journal on Financial Mathematics, 2 (2011), p. 839–865.

[5] R. Jarrow, P. Protter, and J. San Martín, *Testing for asset price bubbles: An invariance theorem.* 2019.

[6] R. A. Jarrow, *Continuous Time Asset Pricing Theory: A Martingale-Based Approach*, Springer, 1 ed., 2019.

[7] R. A. Jarrow, P. Protter, and K. Shimbo, *Asset Price Bubbles in Complete Markets*, Birkhäuser, 2007, p. 97–121.

[8] ——, *Asset price bubbles in incomplete markets*, Mathematical Finance, 20 (2010), p. 145–185.

[9] I. Karatzas and J. Ruf, *Distribution of the time to explosion for one-dimensional diffusions*, Probability Theory and Related Fields, (2013).

[10] I. Karatzas and S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, 2 ed., 2000.

[11] P.-L. Lions and M. Musiela, *Correlations and bounds for stochastic volatility models*, Annales de lInstitut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis, 24 (2007), p. 1–16.

[12] M. Loewenstein and G. A. Willard, *Rational equilibrium asset-pricing bubbles in continuous trading models*, Journal of Economic Theory, 91 (2000), p. 17–58.

[13] A. Mijatović and M. Urusov, *On the martingale property of certain local martingales*, Probability Theory and Related Fields, 152 (2010), p. 1–30.

[14] P. Protter, *A mathematical theory of financial bubbles*, SSRN Electronic Journal, (2012).

[15] J. San Martín, *Teoría de la Medida*, Editorial Universitaria, 1 ed., 2017.

[16] C. A. Sin, *Complications with stochastic volatility models*, Advances in Applied Probability, 30 (1998), p. 256–268.